http://www.xriadiat.com **DS1: S** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS : Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1\text{pts}\times 3)$: Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); x + \frac{1}{x} \succ 2$

2) $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+2023}{n+2024} \neq 1$

3) $P_3 : (\forall n \in \mathbb{N}); n^2 + 3n + 2023$ est un entier impair

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}^{*+}); x + \frac{1}{x} \leq 2$ est vraie

En effet : pour $(1 \in \mathbb{R}^{*+})$ *et* $1 + \frac{1}{1} = 2 \leq 2$ ($x = 1$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 :est fausse

Remarque : comment faire pour trouver ce contre-exemple ?

$$x + \frac{1}{x} \succ 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \succ 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \succ 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \succ 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \succ 0$$

Mais cette inégalité n'est pas vérifiée pour : $x = 1$

2)Montrons que : P_2 : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{n+2023}{n+2024} \neq 1$ est vraie

Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+2023}{n+2024} = 1$

$\frac{n+2023}{n+2024} = 1 \Leftrightarrow n + 2023 = n + 2024 \Rightarrow 2023 = 2024$! C'est une contradiction car on sait que : $2023 \neq 2024$

Ceci signifie : P_2 : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{n+2023}{n+2024} \neq 1$ est vraie

$\overline{P_2} : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n+2023}{n+2024} = 1$

3) $P_3 : (\forall n \in \mathbb{N}); n^2 + 2023n + 2025$ est un entier impair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de n , il est parfois utile de faire une disjonction de cas : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre n.

On peut, par exemple, séparer les cas où n est un entier pair des cas où n est impair

Premier cas : si n est pair : alors n^2 est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Alors : $2023n$ est pair (comme produit d'un nombre pair et un nombre impair)

Donc : $n^2 + 2023n$ est pair (comme somme de nombres pairs)

D'autre part : 2025 est impair

Donc : $n^2 + 2023n + 2025$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

2 iem cas : si n est impair : alors n^2 est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Alors : $2023n$ est impair (comme produit de nombres impairs)
Donc : $n^2+2023n$ est pair (comme somme de nombres impairs)
D'autre part : 2025 est impair
Donc : $n^2+2023n+2025$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

P_3 : « $(\forall n\in\mathbb{N});n^2+2023n+2025$ est un entier impair » est vraie

$\overline{P_3}:(\exists n\in\mathbb{N})\,/\,n^2+2023n+2025$ est un entier pair

Exercice2 : (1,5pts) : Montrer par un Raisonnement par équivalence que :
$(\forall x\in[1;+\infty[)(\forall y\in[1;+\infty[):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}$

Solution : Soit : $(x;y)\in([1;+\infty[)^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2\le\sqrt{xy}^2$$

$$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1\le xy\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{xy-x-y+1}+y-1\le xy$$

$$\Leftrightarrow 0\le xy-x-y+1-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2\Leftrightarrow 0\le\sqrt{xy-x-y+1}^2-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2$$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy-x-y+1}-1\right)^2\ge0$ est une proposition vraie

Donc : $(\forall x\in[1;+\infty[)(\forall y\in[1;+\infty[):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}$

Exercice3 : (2,5pts) : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ $S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k\,x^k=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $S_0=\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k\,x^k=(-1)^0\,x^0=1$ et $\dfrac{x^1+1}{x+1}=1$

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\dfrac{x^{2n+3}+1}{x+1}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k\,x^k=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k\,x^k+(-1)^{2n+1}\,x^{2n+1}+(-1)^{2n+2}\,x^{2n+2}$

Remarque : $(-1)^{2n+2}=1$ car $2n+2$ pair et $(-1)^{2n+1}=-1$ car $2n+1$ impair

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k\,x^k=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}-x^{2n+1}+x^{2n+2}=\dfrac{x^{2n+1}+1-x^{2n+1}(x+1)+x^{2n+2}(x+1)}{x+1}$

$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k\,x^k=\dfrac{x^{2n+1}+1-x^{2n+2}-x^{2n+1}+x^{2n+3}+x^{2n+2}}{x+1}=\dfrac{x^{2n+3}+1}{x+1}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$

$S_n = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k x^k = \frac{x^{2n+1}+1}{x+1}$.

Exercice4 : (2,5pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts})$: Soit $n \in \mathbb{N}$ considérons : $A(n) = 9n^2 + 13n + 5$

1)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : (3n+2)^2 < A(n) < (3n+3)^2$

2)En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{A(n)} \notin \mathbb{N}$

Solution : 1) $A(n) = 9n^2 + 13n + 5 = (3n)^2 + 2\times 3n \times 2 + 2^2 + n + 1 = (3n+2)^2 + n + 1 > (3n+2)^2$

$A(n) = 9n^2 + 13n + 5 \prec 9n^2 + 18n + 9$ en effet : $(9n^2+18n+9) - (9n^2+13n+5) = 5n+4 \succ 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $A(n) \prec (3n)^2 + 2\times 3n \times 3 + 3^2$ c'est-à-dire : $A(n) < (3n+3)^2$ et comme : $(3n+2)^2 < A(n)$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N} : (3n+2)^2 < A(n) < (3n+3)^2$

2) Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N} :$ $\sqrt{A(n)} \notin \mathbb{N}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} : (3n+2)^2 < A(n) < (3n+3)^2$ donc : $\sqrt{(3n+2)^2} < \sqrt{A(n)} < \sqrt{(3n+3)^2}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|3n+2| < \sqrt{A(n)} < |3n+3|$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $3n+2 < \sqrt{A(n)} < 3n+3$ car $3n+2 \in \mathbb{N}$ et $3n+3 \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{A(n)}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs :

$3n+2 \;\; et \;\; 3n+3$ Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{A(n)} \notin \mathbb{N}$

Exercice5 : (3,5pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1\text{pts})$: Soit l'ensemble suivant :

$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n\times m} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \; et \; m \in \mathbb{N}^* \right\}$

1) Montrer que : $0 \notin A$

2) Montrer que : $A \subset]0;1]$

3) Est-ce que $A =]0;1]$?

Solution :1) a) Montrons que : $0 \notin A$

Supposons par l'absurde que : $0 \in A$

$0 \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \; et \; \exists m \in \mathbb{N}^* \,/\, 0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n\times m}$

$0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n\times m} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{n\times m} \Leftrightarrow \frac{n+m}{n\times m} = \frac{1}{n\times m}$

$\Leftrightarrow n+m=1$ et $n \in \mathbb{N}^* \; et \; \exists m \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n + (m-1) = 0$ et $n \in \mathbb{N}^* \; et \; \exists m \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n = 0 \;\; et \;\; m-1 = 0$ car $n \in \mathbb{N}^* \; et \; m-1 \in \mathbb{N}$

Contradiction : $n \in \mathbb{N}^* \; et \; n = 0$

Donc : $0 \notin A$

2) Montrons que : $A \subset]0;1]$

Soit : $r \in A$ Montrons que : $r \in]0;1]$?

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et \ \exists m \in \mathbb{N}^* / r = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m}$

On va raisonner par équivalence : $0 \prec \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \prec \frac{m+n-1}{n \times m} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \times n \times m \prec m+n-1 \leq 1 \times n \times m \Leftrightarrow 0 \prec m+n-1 \leq n \times m \Leftrightarrow 0 \prec m+n-1 \ et \ m+n-1 \leq n \times m$

$\Leftrightarrow 0 \prec m+n-1 \ et \ \ m+n-n \times m-1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \prec m+n-1 \ et \ \ m(1-n)+(n-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \prec m+n-1 \ et \ \ (n-1)(1-m) \leq 0$ Or on a : $n \in \mathbb{N}^*$ donc : $n \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$ donc : $m \geq 1$

Donc : $n+m-1 \geq 2-1 \succ 0$ et On a : $n \geq 1$ et $m \geq 1$ donc : $n-1 \geq 0$ et $m-1 \geq 0$

Par suite : $(n-1)(1-m) \leq 0$

Alors : $0 \prec m+n-1 \ et \ \ (n-1)(1-m) \leq 0$ vraie

Par suite : $0 \prec \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m} \leq 1$ vraie

Conclusion : $A \subset]0;1]$

3) Est-ce que $A =]0;1]$?

On remarque que : $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m} / n \in \mathbb{N}^* \ et \ m \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{Q}$

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0;1]$ mais $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ donc : $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$

Conclusion : $A \neq]0;1]$

Exercice6 : (4pts) : $(0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1{,}5\text{pts})$: Soit l'application : $\begin{array}{l} f : [1;+\infty[\to [2;+\infty[\\ x \mapsto x + \frac{1}{x} \end{array}$

1) Calculer : $f(1)$ et $f(2)$

2) Montrer que f est injective

3) Montrer que f est surjective

4) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Solution : 1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ et $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2) Soient $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \in [1;+\infty[$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1^2+1}{x_1} = \frac{x_2^2+1}{x_2} \Rightarrow x_2(x_1^2+1) = x_1(x_2^2+1)$

$\Rightarrow x_2 x_1^2 + x_2 = x_1 x_2^2 + x_1 \Rightarrow x_2 x_1^2 - x_1 x_2^2 + x_2 - x_1 = 0$

$\Rightarrow x_2 x_1 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_2 x_1 - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \ ou \ \ x_2 x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ou \ \ x_2 x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ou \ \ x_1 = \frac{1}{x_2}$

$si : \ x_1 = \frac{1}{x_2}$ Comme : $x_2 \in [1;+\infty[\ \Rightarrow \ x_1 = \frac{1}{x_2} \leq 1$ et puisque : $x_1 \geq 1$ Alors : $x_1 = 1$

Et par suite $x_2 = 1$ et donc : $x_1 = x_2$

Dans tous les cas : $x_1 = x_2$

Donc f est injective

3) Montrons que f est surjective : Soit $y \in [2;+\infty[$; Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0$: $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 2$

Donc : au moins 2 solutions : $x = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $x = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

Puisque l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ ($\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$)

C'est-à-dire : $\forall y \in [2;+\infty[; \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$

Conclusion : f est surjective

4) Puisque f est injective et surjective alors f est bijective

Soit $y \in [2;+\infty[$; $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0$

$x_1 = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $x_2 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

On a : $x_2 - 1 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} - 1 = \frac{y-2-\sqrt{y^2-4}}{2} = \frac{y-2-\sqrt{(y-2)(y+2)}}{2}$

Comme : $y - 2 \leq y + 2$ $\quad \otimes y-2$

Alors : $(y-2)(y-2) \leq (y+2)(y-2)$ c'est-à-dire : $(y-2)^2 \leq (y+2)(y-2)$

Alors : $\sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $|y-2| \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $y - 2 \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$ car $y \in [2;+\infty[$

Et donc : $x_2 - 1 \leq 0$ donc : $x_2 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \notin y \in [1;+\infty[$

Alors : $x = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ Donc : $\begin{array}{l} f^{-1} : [2;+\infty[\to [1;+\infty[\\ x \mapsto \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \end{array}$

Exercice7 : (3pts) : $(0{,}5\text{pts} + 0{,}5\text{pts} + 1\text{pts} + 1\text{pts})$ Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

b) f est-elle injective ? justifier

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$

b) f est-elle surjective ? justifier

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2}=\frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(1-x)^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2=\frac{x(1-x)^2}{\left(x^2+1\right)^2}=f(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

b) Si je trouve : $x \neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

Si je prends : $x=2$

On a : $f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$

Donc : f n'est pas injective

2) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}-f(x)=\frac{1}{4}-\frac{x(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\left(1+x^2\right)^2-4x(1-x)^2}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-4x\left(x^2-2x+1\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^4-4x^3+8x^2-4x+2x^2+1}{4\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^4-4x^3+10x^2-4x+1}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-4x+10-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2^2+4\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2+4\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}\geq 0$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$

b) Par exemple. 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien