http://www.xriadiat.com **DS1: R** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (9pts) : $(1,5\text{pts}\times 6)$

Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) P_1 : «$(\forall n\in\mathbb{N})$; $6n+5$ est un nombre premier »

2) P_2 : « $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{2n+1}{4}\notin\mathbb{N}$ »

3) P_3 : « $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $y\neq 2x;\left(y\neq\dfrac{1}{8}x\ \Rightarrow\dfrac{x+2y}{2x-y}\neq\dfrac{2}{3}\right)$

4) P_4 : « $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1$ »

5) P_5 : « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});0\prec y^2-x-1$

6) P_6 :« $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3»

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1}$:«$(\exists n\in\mathbb{N})/$ $6n+5$ n'est pas un nombre premier » est vraie

En effet : pour $(\exists n=12\in\mathbb{N})$ et $6\times 12+5=72+5=77=7\times 11$

77 n'est pas un nombre premier ($n=12$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 :est <u>fausse</u>

2) Montrons que : P_2 : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{2n+1}{4}\notin\mathbb{N}$ est vraie

Soit $n\in\mathbb{N}$: Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{2n+1}{4}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{2n+1}{4}=m$

$\dfrac{2n+1}{4}=m\Leftrightarrow 2n+1=4m\Rightarrow 1=4m-2n\Rightarrow 1=2(2m-n)\Rightarrow 1=2k$ avec $k=2m-n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 1$ est pair !. C'est une contradiction car on sait que : 1 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{2n+1}{4}\notin\mathbb{N}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

3) Montrons que : P_3 : « $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $y\neq 2x;\left(y\neq\dfrac{1}{8}x\ \Rightarrow\dfrac{x+2y}{2x-y}\neq\dfrac{2}{3}\right)$ est vraie

Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition est vraie :

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $y\neq 2x$; Par contraposée Montrons que : $\left(\dfrac{x+2y}{2x-y}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{8}x\right)$

$\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3(x+2y)=2(2x-y)\Rightarrow 3x+6y=4x-2y\Rightarrow -x=-8y\Rightarrow y=\frac{1}{8}x$

Par contraposée on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ et\ y\neq 2x;\left(y\neq\frac{1}{8}x\ \Rightarrow\frac{x+2y}{2x-y}\neq\frac{2}{3}\right)$

4) Nous raisonnons par équivalence :

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1\Leftrightarrow\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}\right)^2>1^2\Leftrightarrow(2x+1)^2>4x(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1>4x^2+4x\Leftrightarrow 1>0$

Et puisque on a : $1>0$ est une proposition vraie

Alors $P_4:\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1$ est une proposition vraie

5) P_5 : « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});0\prec y^2-x-1$

« $0\prec y^2-x-1\Leftrightarrow x+1\prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-2$ et on trouve : $(\forall y\in\mathbb{R});-1\prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_5 : est vraie.

$\overline{P_5}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});0\geq y^2-x-1$

6) Montrons $P_6(n)$:« $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3» est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Montrons $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,n^3-n=3k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3-0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,n^3-n=3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(n^3-n)+3n^2+3n=3k+3(n^2+n)=3(k+n^2+n)=3k'$

Avec $k'=k+n^2+n\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};n^3-n$ est divisible par 3

$P_6(n)$:« $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3» est vraie

Exercice2 : (1,5pts) : Montrer par disjonction des cas que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{n^{2022}+3+(n+3)^{2023}}{2}\in\mathbb{N}$

Solution : il suffit de montrer que : $n^{2022}+3+(n+3)^{2023}$ est un entier pair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de x, il est parfois utile de faire une disjonction de cas : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre x.

On peut, par exemple, séparer les cas où x est un entier pair des cas où x est impair, ou encore séparer les cas où x est un réel positif des cas où il est strictement négatif.

Premier cas : si n est pair : alors n^{2022} est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Alors : $n^{2022}+3$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
D'autre part : $n+3$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
Alors : $(n+3)^{2023}$ est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Donc : $n^{2022}+3+(n+3)^{2023}$ est pair (comme somme de nombres impairs)

<u>2 iem cas :</u> si n est impair : alors n^{2022} est aussi impair (comme produit de nombres impairs)
Alors : $n^{2022}+3$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)
D'autre part : $n+3$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)
Alors : $(n+3)^{2023}$ est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Donc : $n^{2022}+3+(n+3)^{2023}$ est pair (comme somme de nombres pairs)
Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^{2022}+3+(n+3)^{2023}}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice3 : (1,5pts) : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{4n+2023}{8} \notin \mathbb{Z}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{4n+2023}{8} \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{Z}$ et $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{4n+2023}{8} = m$

$$\frac{4n+2023}{8} = m \Leftrightarrow 4n+2023 = 8m \Rightarrow 2023 = 8m-4n \Rightarrow 2023 = 2(4m-2n) \Rightarrow 2023 = 2k$$

avec $k = 4m-2n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 2023$ est pair
C'est une contradiction car on sait que : 2023 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{4n+2023}{8} \notin \mathbb{Z}$

Exercice4 : (1,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Montrer que : $\{x \in \mathbb{R} / |2x|+|x-5| \le 3\} \subset \{x \in \mathbb{R} / |3x-5| \le 3\}$

Solution : On pose : $A = \{x \in \mathbb{R} / |2x|+|x-5| \le 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / |3x-5| \le 3\}$

Montrons donc que : $A \subset B$?
<u>Conseils méthodologiques :</u> Pour montrer que E ⊂ F ou que E = F)
- Pour montrer que E ⊂ F : on considère un élément quelconque de E et on montre qu'il est aussi élément de F
- Pour montrer que E = F : On montre que :E ⊂ F et que F ⊂ E .

Soit $x \in \mathbb{R}$:
Supposons que : $x \in A$ et Montrons que : $x \in B$

$x \in A \Rightarrow |2x|+|x-5| \le 3$

Or on sait que : $|a+b| \le |a|+|b|$

Donc : $|2x+x-5| \le |2x|+|x-5| \le 3 \Rightarrow |2x+x-5| \le 3 \Rightarrow |3x-5| \le 3 \Rightarrow x \in B$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : x \in A \Rightarrow x \in B$
Par suite : $A \subset B$

Exercice5 : (3,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts})$

Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+x+2 \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

2) f est-elle injective ?

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=-\frac{1}{4}$

4) f est-elle surjective ?

5) Montrer que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Solution : 1) Montrons que : $f(-1-x)=f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(-1-x)=(-1-x)^2+(-1-x)+2\ =(1+x)^2+-1-x+2=x^2+2x+1+-1-x+2\ =x^2+x+2=f(x)$

2)Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

Si je prends : $x=0$

On a : $f(-1)=f(0)$ mais $0\neq-1$

Donc : f n'est pas injective

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=1$

$f(x)=1\Leftrightarrow x^2+x+2=1\Leftrightarrow x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3\prec0$

Donc : $S=\varnothing$

4)Par exemple : 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

5) Montrons que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$: *On raisonne par double inclusion :*

a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ Montrons que : $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$ C'est-à-dire Montrons que : $\frac{7}{4}\leq f(x)$

$f(x)-\frac{7}{4}=x^2+x+2-\frac{7}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$: $\Delta=1^2-4\times\frac{1}{4}\times1=0$ Donc : $x^2+x+\frac{1}{4}\geq0$

Donc : $f(x)-\frac{7}{4}\geq0$ C'est-à-dire $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$ Alors : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

a) Inversement montrons que : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$: Montrons que : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y\Leftrightarrow x^2+x+2=y\Leftrightarrow x^2+x+2-y=0$. $\Delta=1^2-4\times(2-y)=-7+4y$

Comme : $\frac{7}{4} \leq y$ alors : $-7+4y \geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions : $x = \frac{-1+\sqrt{-7+4y}}{2} \in \mathbb{R}$ ou $x = \frac{-1-\sqrt{-7+4y}}{2} \in \mathbb{R}$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Donc : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Conclusion : $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Exercice6 : (3pts) : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{5}{2};+\infty\right[\\ x \mapsto f(x) = \frac{5}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} \end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$: Résolvons dans : $\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ l'équation $f(x) = y$

Soit : $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} = y \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}} = y - \frac{5}{2}$

$x + \frac{1}{4} \geq 0$ car $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ et $y - \frac{5}{2} \geq 0$ car $y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

$f(x) = y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ Et on a : $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

Donc : $\forall y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ $\exists! x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ tel que : $f(x) = y$

Donc : f est bijective.

$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[\end{cases}$ Donc : $\forall x \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$; $f^{-1}(x) = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{l} f^{-1} : \left[\frac{5}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto f^{-1}(x) = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{array}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien