http://www.xriadiat.com **DS1: Q** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Soit f l'application numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

On considère les propositions suivantes : $P\ :(\exists M\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)\leq M$

Q : « L'application f est pair » ou « l'application f est impair »

1)Déterminer la négation de la proposition P et montrer que P est fausse (justifier avec un raisonnement logique)

2)Déterminer la négation de Q et donner sa valeur de vérité (justifier avec un raisonnement logique)

Solution : 1) $P\ :(\exists M\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)\leq M$ donc : $\overline{P}\ :(\forall M\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}): f(x)\succ M$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que :

$\forall x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\leq M$

$f(x)\leq M \Rightarrow x^2+2x\leq M \Rightarrow x^2+2x+1\leq M+1$

$\Rightarrow (x+1)^2\leq M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow |x+1|\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1}\leq x+1\leq\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\leq x\leq\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que :

$\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

C'est-à-dire : $\overline{P}\ :(\forall M\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}): f(x)\succ M$ est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

2) Q : « L'application f est pair » ou « l'application f est impair »

$\overline{Q}$: « L'application f n'est pas pair » et « l'application f n'est pas impair »

On peut aussi dire : $\overline{Q}$: « L'application f n'est ni pair ni impair »

f est n'est pas pair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=3$ et $f(-1)=-1$ donc $f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc : $\overline{Q}$: est vraie

Par suite : Q est une proposition fausse

Exercice2 : (4pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) a) En utilisant un raisonnement par équivalence : montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$

b) Montrer que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq x+y+1$

Indication : appliquer b) puis a)

Solution :1) Soit : $a\in\mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{2a+1}\leq a+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2a+1}\right)^2\leq(a+1)^2\Leftrightarrow 2a+1\leq a^2+2a+1\Leftrightarrow 0\leq a^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$ est aussi une Proposition vraie

2) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

$$\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\leq 2a^2+2b^2\Leftrightarrow 2ab\leq a^2+b^2\Leftrightarrow 0\leq a^2+b^2-2ab\Leftrightarrow 0\leq(a-b)^2$$

Donc : $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow 0\leq(a-b)^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est aussi une Proposition vraie

2) Soient : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$

$x\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow x\succ 0\Rightarrow 4x\succ 0\Rightarrow 4x+1\succ 1\quad et\ 1\succ 0\Rightarrow a=4x+1\succ 0$

$y\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow y\succ 0\Rightarrow 4yx\succ 0\Rightarrow 4y+1\succ 1\quad et\ 1\succ 0\Rightarrow b=4y+1\succ 0$

D'après b) on a alors : $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{\frac{\sqrt{4x+1}^2+\sqrt{4y+1}^2}{2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{\frac{4x+1+4y+1}{2}}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{\frac{4x+4y+2}{2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{2x+2y+1}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{2(x+y)+1}$ ❶

D'après a) et puisque : $a=x+y\succ 0$ alors : $\sqrt{2(x+y)+1}\leq x+y+1$ ❷

De : ❶ et ❷ En déduit que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq x+y+1$

Exercice3 : (5pts) : $(2\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soients $a;b;c$ des nombres entiers relatifs impairs

1) Montrer que : l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+x-(2n+3)=0$ Où $n\in\mathbb{N}$

3) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

4) Montrer que : $\sqrt{2029}\notin\mathbb{Q}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $ar^2+br+c=0$:

$r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$; $\exists q \in \mathbb{Z}^*$ tel que : $r=\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$

On a donc : $a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\left(\frac{p}{q}\right)+c=0$ donc : $a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0$

Donc : $a\,p^2+bpq+cq^2=0$ ①

✓ Si : p et q sont paires

2 divise p et 2 divise q donc : $p \wedge q \neq 1$

Impossible car: $p \wedge q = 1$

✓ Si : p et q sont impaires

On a : $a\,p^2$ est impair et bpq est impair et cq^2 est impair

Donc : $a\,p^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair

✓ Si : p est pair et q est impaire

On a : $a\,p^2$ est pair et bpq est pair et cq^2 est impair Donc : $a\,p^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair

✓ Si : p est impaire et q sont paire

On a : $a\,p^2$ est impair et bpq est pair et cq^2 est pair Donc : $a\,p^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair

Dans tous les cas : $a\,p^2+bpq+cq^2 \neq 0$

Par suite : l'équation $a\,x^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2+x-(2n+3)=0$ Où $n \in \mathbb{N}$

$\Delta = 1^2+4(2n+3)=8n+13 \succ 0$ car $n \in \mathbb{N}$ Donc : deux solutions :

$x_1=\frac{-1+\sqrt{8n+13}}{2}$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{8n+13}}{2}$ D'où : $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{8n+13}}{2};\frac{-1+\sqrt{8n+13}}{2}\right\}$

3) Déduction que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{8n+13} \notin \mathbb{Q}$

Par l'absurde, supposons que : $\sqrt{8n+13} \in \mathbb{Q}$

Alors : $-1+\sqrt{8n+13} \in \mathbb{Q}$

Alors : $\frac{-1+\sqrt{8n+13}}{2} \in \mathbb{Q}$

Alors : l'équation : $1x^2+1x-(2n+3)=0$ admet des solutions dans $\mathbb{Q}$

Contradiction : car l'équation $1x^2+1x-(2n+3)=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

($a=1\in\mathbb{Z}$; $b=1\in\mathbb{Z}$; $c=-(2n+3)\in\mathbb{Z}$) et sont impairs

4) Montrons que : $\sqrt{2029} \notin \mathbb{Q}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{8n+13} \notin \mathbb{Q}$ et on a : $8n+13=2029 \Leftrightarrow 8n=2016 \Leftrightarrow n=252$

Donc : $\sqrt{8\times252+13} \notin \mathbb{Q}$ c'est-à-dire : $\sqrt{2029} \notin \mathbb{Q}$

Exercice4 : (1,5pts) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I): $\sqrt{x-1} \geq x-7$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I) : $\sqrt{x-1} \geq x-7$:

$D_3 = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\} = [1;+\infty[$

Le tableau de signe de l'expression $x-7$ est :

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	0	$+$	

Soit $x \in [1;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I_3)

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq x-7$

1 cas : si $x \in [1;7[$ alors $x-7 \prec 0$

Donc : l'Inéquation est vraie pour tout $x \in [1;7[$

Donc $S_1 = [1;7[$

2 cas : si $x \in [7;+\infty[$ alors $x-7 \geq 0$

Donc : $x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq x-7 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \leq (x-7)^2$

$\Leftrightarrow x-1-(x^2-14x+49) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+15x-50 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [5;10]$ Donc $S_2 = [5;10] \cap [7;+\infty[= [7;10]$

Donc : $S = S_1 \cup S_2 = [1;7[\cup [7;10] = [1;10]$

Exercice5 : (2pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts})$

Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

1) Monter que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Leftrightarrow A \subset B$

2)Monter que : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

Solution : 1) $\Rightarrow)$ On suppose que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

Montrons que $A \subset B$???

Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A \subset B$, on montre que :

$x \in A \Rightarrow x \in B$

Soit : $x \in A \Rightarrow x \in A - C$ ou $x \in A \cap C$

Car : $A = (A-C) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in B - C$ ou $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in B$ ou $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

Donc : $A \subset B$

Par suite : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Rightarrow A \subset B$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $A \subset B$

Montrons que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$???

a) Montrons que : $A \cap C \subset B \cap C$

Soit : $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in C$

$\Rightarrow x \in B \text{ et } x \in C$

$\Rightarrow x \in B \cap C$

Donc : $A \cap C \subset B \cap C$

b) Montrons que : $A - C \subset B - C$

Soit : $x \in A - C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \notin C$

$\Rightarrow x \in B \text{ et } x \notin C$

$\Rightarrow x \in B - C$

Donc : $A - C \subset B - C$

En déduit donc que : $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

Conclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

2)Montrons que : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

Démontrons par double implication.

<u>Methode1 : Remarque :</u> on a le résultat suivant : $A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$

Aussi on a : $A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$

$\Rightarrow$) On suppose que : $A \cup B = A \cap C$

On a : $A \cup B = A \cap C \Rightarrow A \cup B \subset A$ et $A \cup B \subset C$

$\Rightarrow B \subset A$ et $A \subset C \Rightarrow B \subset A \subset C$ Donc : $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$

$\Leftarrow$) On suppose que : $B \subset A \subset C$

On a : $B \subset A \subset C \Rightarrow B \subset A$ et $A \subset C$

$\Rightarrow A \cup B = A$ et $A \cap C = A \Rightarrow A \cup B = A \cap C$ Donc : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

<u>Methode2 : Remarque :</u>Pour montrer que $A \subset B$, on montre que : $x \in A \Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow$) On suppose que : $A \cup B = A \cap C$; Montrons que : $B \subset A \subset C$?

C'est à dire Montrons que : $B \subset A$ et $A \subset C$

- ✓ Soit $x \in B$ montrons que $x \in A$?

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C$

C'est-à-dire : $x \in A$: Ceci signifie que : $B \subset A$ ❶

- ✓ Soit $x \in A$ montrons que $x \in C$?

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C$

C'est-à-dire : $x \in C$: Ceci signifie que : $A \subset C$ ❷

On a : ❶ et ❷ $\Rightarrow B \subset A \subset C$

Donc : $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$

$\Leftarrow$) On suppose que : $B \subset A \subset C$

On a : $B \subset A \subset C \Rightarrow B \subset A$ et $A \subset C$

Montrons que : $A \cup B = A \cap C$?

C'est-à-dire : Montrons que : $A \cup B \subset A \cap C$ et $A \cap C \subset A \cup B$

Montrons que : $A \cup B \subset A \cap C$?

- ✓ Soit $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in A \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow x \in C \text{ ou } x \in C \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$

C'est-à-dire : $A \cup B \subset A \cap C$ ❶

Montrons que : $A \cap C \subset A \cup B$?

- ✓ Soit $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$

C'est-à-dire : $A \cap C \subset A \cup B$ ❷

On a : ❶ et ❷ $\Rightarrow A \cup B = A \cap C$

Exercice6 : (4,5pts) : $\left(1\text{pts}+3{,}5\text{pts}\right)$ Soit l'application : $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto x+\sqrt{x}+\frac{1}{4} \end{array}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$

avec : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x \mapsto \sqrt{x}+\frac{1}{2} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto x^2 \end{array}$

2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque
b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque
c) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x)=x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}=x-\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $h = g \circ f$ avec : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x \mapsto \sqrt{x}+\frac{1}{2} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto x^2 \end{array}$

2)a) f est une bijection en effet : Soit $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$: Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{2}=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{2y-1}{2}$ Or $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc $2y-1 \geq 0$; donc : $x=\left(\frac{2y-1}{2}\right)^2$

Donc $x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution

Donc : f est une bijection de $\mathbb{R}^+$vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\begin{array}{l} f^{-1}:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en et : $\begin{array}{l} g^{-1}:\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$

c) h est la composée de deux bijections f et g donc :h est une bijection de $\mathbb{R}^+$dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Et $\forall x \in \mathbb{R}^+ : h^{-1}(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ g^{-1}(x)=f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est $\begin{array}{l} h^{-1}:\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien