http://www.xriadiat.com **DS1: P** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (4pts) : $(2\text{pts}+2\text{pts})$

1) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Traduire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs puis nier les propositions :

a) L'application f est l'application nulle :

b) L'application f s'annule

c) L'application f s'annule une seule fois

d) L'application f s'annule sur $\mathbb{R}^+$

2) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x^2+6x-7$

On considère les propositions suivantes : $P \ :(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2): x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y)$

$Q:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): xy+2y+x+2=0$

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions P et Q (justifier)

Solution :1) a) la fonction f est la fonction nulle : $(\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)=0$

b) la fonction f s'annule : P: $(\exists x\in\mathbb{R})/ f(x)=0$

c) la fonction f s'annule une seule fois : P: $(\exists! x\in\mathbb{R})/ f(x)=0$

$\overline{P}$: ne s'annule jamais ou s'annule au moins 2 fois

$\overline{P}: (\forall x\in\mathbb{R});/ f(x)\neq 0 \ ou \ \ (\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})/ f(x)=f(y)=0 \ et \ \ x\neq y$

d) la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^+$: P: $(\exists x\in\mathbb{R}^+)/ f(x)=0$

$\overline{P}$: $(\forall x\in\mathbb{R}^+);/ f(x)\neq 0$

2) a) Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U \ et \ non(V)$"

$\overline{P} \ :(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2): x\neq y \ et \ f(x)=f(y)$

$f(1)=1^2+6\times1-7=7-7=0$ et $f(-7)=(-7)^2+6\times(-7)-7=49-42-7=0$

On a : $f(1)=0$ et $f(-7)=0$

Donc $:(\exists(1;-7)\in\mathbb{R}^2): 1\neq -7 \ et \ f(1)=f(-7)$

Donc : $\overline{P}$:est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

b) $Q:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): xy+2y+x+2=0$

$xy+2y+x+2=0 \Leftrightarrow y(x+2)+x+2=0 \Leftrightarrow (x+2)(y+1)=0$

Si je prends : $y=-1$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R}): xy+2y+x+2=0$

La proposition Q est vraie

Exercice2 : (9pts) : $(1{,}5\text{pts}\times 6)$

1)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin\left]-\infty;-3\right[$ et $x\notin\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $\Rightarrow 2x^2+5x-3\leq 0$

2)Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right):\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

3) Montrer que : $\left(\forall (x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right): x+y+z=0\Rightarrow |x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}\left(|x|+|y|+|z|\right)$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrer que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

6)Montrer par disjonction des cas que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0$

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x^2+5x-3\succ 0\Rightarrow x\in\left]-\infty;-3\right[$ ou $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\Delta=5^2-4\times(-3)\times 2=49\succ 0$

Donc : deux racines : $x_1=\frac{-5+\sqrt{49}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{-5-\sqrt{49}}{4}=\frac{-12}{4}=-3$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$2x2+5x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x^2+5x-3\succ 0$ *si* $x\in\left]-\infty;-3\right[$ ou $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $2x^2+5x-3\succ 0\Rightarrow x\in\left]-\infty;-3\right[$ ou $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Alors : Par contraposition : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin\left]-\infty;-3\right[$ et $x\notin\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $\Rightarrow 2x^2+5x-3\leq 0$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+2}\right)^2=\left(\sqrt{x}+1\right)^2\Leftrightarrow 2x+2=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}+1$

$\Leftrightarrow 2x+2=x+2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2\Leftrightarrow x=1$

Donc : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right):\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

3)Soient $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$: On suppose que : $x+y+z=0$

On a : $|x-y|+|y-z|+|z-x|=\frac{1}{2}\left(2|x-y|+2|y-z|+2|z-x|\right)$

C'est-à-dire : $=\frac{1}{2}\left(\left(|x-y|+|y-z|\right)+\left(|y-z|+|z-x|\right)+\left(|z-x|+|x-y|\right)\right)$

$|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}\left(|x-2y+z|+|y-2z+x|+|z-2x+y|\right)$

Et on a : $x+y+z=0$ donc : $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}\left(|-3x|+|-3z|+|-3y|\right)$

Donc : $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq \frac{3}{2}(|x|+|z|+|y|)$

Donc : $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq \frac{1}{2}(|x|+|z|+|y|)$ Car : $\frac{3}{2}(|x|+|z|+|y|)\geq \frac{1}{2}(|x|+|z|+|y|)$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.
Par l'absurde, supposons que : n est un carré parfait, et $2n$ est un carré parfait,

Donc : il existe : $m\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n=m^2$ et $\exists p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $2n=p^2$

On a : $n=m^2$ donc : $2n=2m^2$ et donc : $2m^2=p^2$

Donc : $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{2}m=p$

Donc : $\exists m\in\mathbb{N}^*$ $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{2}=\frac{p}{m}\in\mathbb{Q}$

C'est une contradiction car on a : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

5) 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :

$$3^{5\times 0}+4^{5\times 0+2}+5^{5\times 0+1}=1+16+5=22=2\times 11$$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}=11k$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}/3^{5n}=11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/3^{5n+5}+4^{5n+5+2}+5^{5n+5+1}=11k'$??

$$3^{5n+5}+4^{5n+5+2}+5^{5n+5+1}=3^{5n}\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5$$

$$=\left(11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}\right)\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5$$

$$=11k\times 3^5-4^{5n+2}\times 3^5-5^{5n+1}\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5$$

$$=11k\times 3^5+\left(4^5-3^5\right)4^{5n+2}+\left(5^5-3^5\right)5^{5n+1}=11k\times 3^5+(1024-243)4^{5n+2}+(3125-243)5^{5n+1}$$

$$=11k\times 3^5+781\times 4^{5n+2}+2882\times 5^{5n+1}=11k\times 3^5+71\times 11\times 4^{5n+2}+262\times 11\times 5^{5n+1}$$

$=11\left(k\times 3^5+71\times 4^{5n+2}+262\times 5^{5n+1}\right)=11k'$ avec $k'=k\times 3^5+71\times 4^{5n+2}+262\times 5^{5n+1}\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}: 3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

6) Montrons par disjonction des cas que : $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\succ -\frac{1}{2}(x+2)$

<u>Premier cas :</u> si $x+2\succ 0$ c'est-à-dire ; $x\succ -2$ donc : $-\frac{1}{2}(x+2)\prec 0$

Alors : $\sqrt{x^2+1}\succ -\frac{1}{2}(x+2)$ car $\sqrt{x^2+1}\succ 0$ et $-\frac{1}{2}(x+2)\prec 0$

<u>2 ieme cas :</u> si $x+2\leq 0$ c'est-à-dire ; $x\leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2)\geq 0$

$$\sqrt{x^2+1}\succ -\frac{1}{2}(x+2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\succ \frac{1}{4}(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+1\right)\succ x^2+4x+4\Leftrightarrow 4x^2+4-x^2-4x-4\succ 0\Leftrightarrow 3x^2-4x\succ 0$$

Comme : $3x^2-4x\succ 0$ sur $]-\infty;-2]$ (proposition vraie) (on dresse le tableau de signe de : $3x^2-4x$

Alors : si $x \leq -2$ $\sqrt{x^2+1} \succ -\frac{1}{2}(x+2)$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) \succ 0$

Exercice3 : (1,5pts) : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E
Vérifiant : $E = A \cup B$ et $A \cap C \subset B$ et $B \cap C \subset A$
Monter que : $C \subset A \cap B$

Solution : Soit $x \in C$ montrons que $x \in A \cap B$?

Si $x \notin A$ comme : $E = A \cup B$ $\Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cap C$
$\Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ on aboutit à une contradiction

Donc : $x \in A$ (1) et comme : $x \in C$

Alors : $x \in A \cap C$ et puisque : $A \cap C \subset B$

Alors : $x \in B\,(2)$

D'après 1 et 2 on en déduit que : $x \in A \cap B$

Conclusion : $C \subset A \cap B$

Exercice4 : (2,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts})$ Soit L'application f : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - 6x + 5$

1) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

Solution : 1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 = 0$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 \prec 0$

Donc : $S = \varnothing$

2) $f(x) = 0$ n'a pas de solutions donc $0 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est est-pas surjective

3) Méthode : Pour les fonctions : $f(x) = ax^2 + bx + c$

$5 = c \in \mathbb{R}$ (Ensemble d'arrivé) : on Recoud l'équation $f(x) = 5$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(3x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = 2$

Donc : $f(0) = 5 = f(2)$ mais $0 \neq 2$

Donc : f n'est pas injective

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

a) $f([1;+\infty[) = ?$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x^2 - 2x) + 5 = 3((x-1)^2 - 1) + 5 = 3(x-1)^2 - 3 + 5 = 3(x-1)^2 + 2$

Remarque : $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ et $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$f([1;+\infty[) = \{f(x) / x \in [1;+\infty[\}$

$x \in [1;+\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$

$x \in [1;+\infty[\Leftrightarrow f(x) \in [2;+\infty[$

$f([1;+\infty[) = [2;+\infty[$

b) $f^{-1}([2;11])$?

$f^{-1}([2;11]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [2;11]\}$

$x \in f^{-1}([2;11]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ et\ 2 \le f(x) \le 11 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ et\ 2 \le 3(x-1)^2 + 2 \le 11 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ et\ 0 \le 3(x-1)^2 \le 9$

$\Leftrightarrow 0 \le (x-1)^2 \le 3$

$\Leftrightarrow 0 \le |x-1| \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \le x-1 \le \sqrt{3}\ ou\ 0 \le -x+1 \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \le x \le \sqrt{3}+1\ ou\ -1 \le -x \le \sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le \sqrt{3}+1\ ou\ 1-\sqrt{3} \le x \le 1$

$x \in f^{-1}([2;11]) \Leftrightarrow 1 \le x \le \sqrt{3}+1\ ou\ 1-\sqrt{3} \le x \le 1 \Leftrightarrow x \in \left[1;\sqrt{3}+1\right] ou\ x \in \left[1-\sqrt{3};1\right]$

Donc : $f^{-1}([5;10]) = \left[1-\sqrt{3};1\right] \cup \left[1;\sqrt{3}+1\right] = \left[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right]$

Exercice5 : (3pts) : $(1\text{pts}+2\text{pts})$

1) Montrer que : $\forall x \in [-1;0]\ ; 1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f : [-1;0] \to [1;2] \\ x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$

a) Vérifier que : $\forall x \in [-1;0]\ ; f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

b) Montrer que f : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Solution : 1) Montrons que : $\forall x \in [-1;0]\ ; 1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2$

Soit $x \in [-1;0]$

$1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2 \Leftrightarrow 1 + x \le 2\sqrt{x+1} \le 2 + x$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 \le \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \le (2+x)^2 \Leftrightarrow (1+x)^2 - 4(x+1) \le 0$ et $(2+x)^2 - 4(x+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(1+x-4) \le 0$ et $x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(x-3) \le 0$ et $x^2 \ge 0$

Comme : $x \in [-1;0]$ alors : $-1 \le x \le 0$

Donc : $0 \le x+1 \le 1$ et $-4 \le x-3 \le -3$

On a donc : $(1+x)(x-3) \le 0$ et $x^2 \ge 0$ (vraie)

Par suite : $\forall x \in [-1;0]\ ; 1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2$.

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f : [-1;0] \to [1;2] \\ x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$

a) Vérifions que : $\forall x \in [-1;0]\ ; f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x = 1 + 2\sqrt{x+1} - x - 1 = 1 + 2\sqrt{x+1} - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 2 - \left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\sqrt{x+1} + 1\right)$

Donc : $f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

b) Montrons que f : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Soit $y\in[1;2]$; Résolvons dans : $[-1;0]$; l'équation : $f(x) = y$

$f(x)=y\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}-x=y\Leftrightarrow 2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=y$

$\Leftrightarrow 2-y=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2\Leftrightarrow\left|\sqrt{x+1}-1\right|=\sqrt{2-y}$ Car $2-y\geq 0$

$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\sqrt{2-y}$ Puisque $x\in[-1;0]$; et donc : $\sqrt{x+1}-1\leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1-\sqrt{2-y}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2$

Car : $-2\leq -y\leq -1\Rightarrow 0\leq 2-y\leq 1\Rightarrow 0\leq\sqrt{2-y}\leq 1\Rightarrow -1\leq-\sqrt{2-y}\leq 0$

$\Rightarrow 0\leq 1-\sqrt{2-y}\leq 1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2\Leftrightarrow x+1=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2\Leftrightarrow x=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2-1$

Comme : $x=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2-1\in[-1;0]$

Ceci signifie que l'application f est bijective.

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $$\begin{aligned} f^{-1}:[1;2]&\to[-1;0]\\ x&\mapsto\left(1-\sqrt{2-x}\right)^2-1\end{aligned}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien