http://www.xriadiat.com **DS1: O** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (4pts) : $\left(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}\right)$

Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et déterminer leurs négations :

1) P : "$\sqrt{81}\neq\sqrt{16}+\sqrt{25}$ *ou* $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

2) Q : « $\forall x\in\left]-\infty;-5\right];-x^2-x+6\leq 0$ »

3) R : « $\forall x\in\mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x=0$ »

4) S : « $\exists n\in\mathbb{N};\forall x\in\mathbb{R}:n-1\leq x^2$ »

Solution : 1) P : "$\sqrt{81}\neq\sqrt{16}+\sqrt{25}$ *ou* $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

"$\sqrt{81}\neq\sqrt{16}+\sqrt{25}$ " est fausse car : "$\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9$ *et* $\sqrt{81}=9$"

$\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ Signifie : $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$ est fausse car :

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}=5+2\sqrt{6}$ Mais : $\sqrt{5}^2=5$

P : "$\sqrt{81}\neq\sqrt{16}+\sqrt{25}$ *ou* $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$" est fausse

$\overline{P}$: "$\sqrt{81}=\sqrt{16}+\sqrt{25}$ *et* $\sqrt{3}\neq\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

2) Q : « $\forall x\in\left]-\infty;-5\right];-x^2-x+6\leq 0$ »

$-x^2-x+6$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 + 4 \times 1 \times 6 = 25$.

Comme : $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{25}}{2a}=\dfrac{1-5}{-2}=2$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{25}}{2a}=\dfrac{1+5}{-2}=-3$

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$-x2-x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\forall x\in\left]-\infty;-3\right];-x^2-x+6\leq 0$ et Comme : $-5\leq-3$

Q : « $\forall x\in\left]-\infty;-5\right];-x^2-x+6\leq 0$ » est vraie et $\overline{Q}$: « $\exists x\in\left]-\infty;-5\right];-x^2-x+6\succ 0$ »

3) R : « $\forall x\in\mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x=0$ » alors : $\overline{R}$: « $\exists x\in\mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x\neq 0$ »

$\overline{R}$: « $\exists x\in\mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x\neq 0$ »; il suffit de prendre : $x=1$: $1\in\mathbb{R}^+;\sqrt{1^6+1}-1=\sqrt{2}-1\neq 0$

$\overline{R}$: est vraie par suite R : est fausse

4) S : « $\exists n\in\mathbb{N};\forall x\in\mathbb{R}:n-1\leq x^2$ »; est vraie il suffit de prendre :

$n=1$: $1\in\mathbb{N};1-1=0\leq x^2 \quad\Rightarrow \exists n=1\in\mathbb{N};\forall x\in\mathbb{R}:1-1\leq x^2$

Exercice2 : (7,5pts) : $(1{,}5\text{pts}\times 5)$

1) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) Montrer que : $\left(\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right): x+y+z=0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

3)Montrer par disjonction des cas que : $\forall x\in\mathbb{R}: |x-1|\leq x^2-x+1$

4)Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sqrt{n^2+7n+12}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrons que : $\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ou\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Rightarrow 2xy2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2=1$

$\Rightarrow 2xy-\sqrt{2}y-\sqrt{2}x+1=0\Rightarrow 2y\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2y-\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\ ou\ 2y-\sqrt{2}=0\ \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}=0\ ou\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Par contraposition on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) Soient $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$

$x+y+z=0\Leftrightarrow x+y=-z\Leftrightarrow(x+y)^3=(-z)^3\Leftrightarrow x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-z^3$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)$ or $(x+y=-z)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(-z)=3xyz$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: |x-1|\leq x^2-x+1$

Soit $x\in\mathbb{R}$: <u>Premier cas :</u> si $x-1\geq 0$ c'est-à-dire ; $x\geq 1\Rightarrow|x-1|=x+1$

$|x-1|\leq x^2-x+1\Leftrightarrow 0\leq x^2-x+1-x+1\Leftrightarrow 0\leq x^2-2x+2\Leftrightarrow 0\leq(x-1)^2+1$

Comme : $0\leq(x-1)^2+1$ est une proposition vraie

Alors : si $x\geq 1$: $|x-1|\leq x^2-x+1$

<u>2 ieme cas :</u> si $x-1\prec 0$ c'est-à-dire ; $x\prec 1\Rightarrow|x-1|=-x-1$

$|x-1|\leq x^2-x+1\Leftrightarrow 0\leq x^2-x+1+x-1\Leftrightarrow 0\leq x^2$

Comme : $0\leq x^2$ est une proposition vraie

Alors : si $x\prec 1$: $|x-1|\leq x^2-x+1$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall x\in\mathbb{R}: |x-1|\leq x^2-x+1$

4) Notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : Supposons que : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

3étapes : Montrons alors que : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$??

On a : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(1+3+5+...+(2n+1))+(2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

Donc : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+1)^2+(2n+3)$

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

Donc : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

5) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+7n+12}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+7n+12}=m$

$\sqrt{n^2+7n+12}=m \Leftrightarrow n^2+7n+12=m^2 \Leftrightarrow n^2+6n+9+n+3=m^2 \Leftrightarrow (n+3)^2+n+3=m^2$

et donc : $(n+3)^2 \prec m^2$ et comme : $(n+4)^2=n^2+8n+16$

Alors : $(n+4)^2-m^2=(n^2+8n+16)-(n^2+7n+12)=n+4\succ 0$

On a alors : $(n+3)^2\prec m^2\prec(n+4)^2$ c'est-à-dire : $n+3\prec m\prec(n+3)+1$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n+3 \ \ et \ \ n+4$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \sqrt{n^2+7n+12}\notin\mathbb{N}$

Exercice3 : (4,5pts) : $(2\text{pts}+2\text{pts}+0,5\text{pts})$

Soit l'application g : $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}^*$

$$x\mapsto g(x)=\frac{9}{2x-1}$$

1) a) Montrer que : g est injective

b) Montrer que : g est surjective

2) En déduire que g est une bijection. Déterminer son application réciproque

3) Déterminer $g^{-1}([-5;2])$

Solution : 1) a) $g(x)=\dfrac{9}{2x-1}$

Soient $x_1\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $x_2\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow\dfrac{9}{2x_1+1}=\dfrac{9}{2x_2+1}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2x_1+1}=\dfrac{1}{2x_2+1}\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1$

$\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Ainsi on a montré que g est injective.

b)Soit $y \in \mathbb{R}^*$: Résolvons dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ l'équation : $g(x) = y$

$g(x)=y \Leftrightarrow \frac{9}{2x-1}=y \Leftrightarrow 9=y(2x-1)$

$\Leftrightarrow 9=y(2x-1) \Leftrightarrow 2xy-y=9 \Leftrightarrow 2xy=9+y \Leftrightarrow 2xy=9+y$ Comme $y \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow x=\frac{9+y}{2y}$ Bien défini.

On doit aussi montrer que : $x=\frac{9+y}{2y} \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

C'est-à-dire : On doit montrer que : $\frac{9+y}{2y} \neq \frac{1}{2}$??

On raisonne par l'absurde, c-à-d on suppose que : $\frac{9+y}{2y}=\frac{1}{2}$

$\frac{9+y}{2y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(9+y)=2y \Leftrightarrow 18+2y=2y \Leftrightarrow 18=0$

Ce qui est impossible.

On déduit alors : $\forall y \in \mathbb{R}^* \ \exists x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} / g(x)=y$

Ceci signifie que l'application g est surjective.

2)On a l'application g est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application g est bijective.

$$\begin{cases} g(x)=y \\ x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g^{-1}(y)=\frac{9+y}{2y} \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g^{-1}(x)=\frac{9+x}{2x}$

$$g^{-1}:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$x \mapsto g^{-1}(x)=\frac{9+x}{2x}$$

2) Déterminons : $g^{-1}([-5;2])$

On a : $g^{-1}(x)=\frac{9+x}{2x}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

$g^{-1}([-5;2]-\{0\})=g^{-1}([-5;0[\cup]0;2])$

$=g^{-1}([-5;0[)\cup g^{-1}(]0;2])$

$-5 \leq x \prec 0 \Rightarrow \frac{9}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2} \leq \frac{-2}{5}$

$0 \prec x \leq 2 \Rightarrow \frac{11}{4} \leq \frac{9}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

Ainsi : $g^{-1}([-5;2])=\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{11}{4};+\infty\right[$

Exercice4 : (4pts) : $\left(3\text{pts}+1\text{pts}\right)$ Soit l'application f : $\begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\rightarrow[4;+\infty[\\ (x;y)\mapsto(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\end{array}$

1) Montrer que f est surjective
2) f est-elle injective ?

Solution : 1) 2) Soit : $z\in[4;+\infty[$; $\exists?(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

Tel que : $f(x;y)=z$??

$$f(x;y)=z\Leftrightarrow(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=z$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1=z\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=z-2$$

On pose : $\frac{x}{y}=t$ $\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=z-2\Leftrightarrow t^2-(z-2)t+1=0$

$\Delta=(z-2)^2-4=z^2-4z$

Comme : $45\leq z$ alors : $z-2\geq2\Rightarrow(z-2)^2\geq4$

Donc : $\Delta=(z-2)^2-4\geq0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$t=\frac{(z-2)+\sqrt{(z-2)^2-4}}{2}\succ0$ ou $t=\frac{(z-2)-\sqrt{(z-2)^2-4}}{2}$

Donc : $\exists(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ tel que : $f(x;y)=z$

Donc : f est surjective

2) f est-elle injective ?

Si je trouve : $(x_1;x_2)\neq(x_1';x_2')$ et $f(x_1;x_2)=f(x_1';x_2')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f\left(\frac{1}{2};2\right)=\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)=f\left(2;\frac{1}{2}\right)$ mais $\left(\frac{1}{2};2\right)\neq\left(2;\frac{1}{2}\right)$

Donc : f n'est pas injective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien