1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS : Durée :2 heures

(La correction voir http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : (3pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$ Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et donner la valeur de vérité et la négation (justifier les réponses)

1) P: « l'équation $x^2-2x-5=0$ admet une solution dans l'ensemble des entiers naturels »

2) Q: « l'inéquation $x^2-3x-11\leq 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres réels »

3) R: « Tout entier naturel multiple de 12 est divisible par 3 »

Exercice2 : (7pts) : $(2\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right):\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

b) Déduire que : $\left(\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right):\dfrac{a+b}{c^2}+\dfrac{b+c}{a^2}+\dfrac{a+c}{b^2}\geq 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

2) Montrer que la proposition : « $\left(\forall(n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+..+\dfrac{1}{n+m}\in\mathbb{N}$ » est fausse

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4]\Rightarrow x^2-3x-4>0$

4) Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Exercice3 : (2,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$ Soit $n\in\mathbb{N}$: On pose : $U_n=n4^{n+1}-(n+1)4^n+1$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3\left(4^{n+1}-1\right)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre : $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Exercice4 : (3,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$: Soit L'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+2x+2\end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f\left([-1;+\infty[\right)$ et $f^{-1}\left([5;10]\right)$

Exercice5 : (4,5pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+2\text{pts})$ Soient les applications :

$\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:]1;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2\end{array}$

1) Déterminer : $f\left([2;4[\right)$ et $g^{-1}\left(\{9\}\right)$

2) Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a) Vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[:g(x)=\left(f(x)\right)^2$

3)b) En déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien