http://www.xriadiat.com **DS1: N** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $\left(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}\right)$

Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et donner la valeur de vérité et la négation (justifier les réponses)

1) P: « l'équation $x^2-2x-5=0$ admet une solution dans l'ensemble des entiers naturels »

2) Q: « l'inéquation $x^2-3x-11\le 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres réels »

3) R: « Tout entier naturel multiple de 12 est divisible par 3 »

Solution :1) P: « $\exists x\in\mathbb{N};x^2-2x-5=0$ »

$x^2-2x-5=0$: Δ = b² – 4ac = (-2)² + 4 x 1 x 5= 24.

Comme : Δ > 0, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{2-2\sqrt{6}}{2}=1-\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$ et $x_2=\frac{2+2\sqrt{6}}{2}=1+\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$

Par suite : P est une proposition fausse.

$\overline{P}$: « $\forall x\in\mathbb{N};x^2-2x-5\neq 0$ »

2) $x^2-3x-11$: Δ = b² – 4ac = (-3)² + 4 x 1 x 11= 9+44=53 > 0 .

Comme : Δ > 0, le trinôme possède deux racines distinctes

L'inéquation $x^2-3x-11\le 0$ admet au moins ses racines comme solutions

est une proposition fausse.

Q: $\forall x\in\mathbb{R};x^2-3x-11\succ 0$

$\overline{Q}$: $\exists x\in\mathbb{R};x^2-3x-11\le 0$

3) R: $\forall n\in\mathbb{N}$ « n est multiple de 12 $\Rightarrow$ n est divisible par 3 » est une proposition vraie.

En effet : Soit $n\in\mathbb{N}$

n est multiple de 12 $\Rightarrow$ $\exists k\in\mathbb{N}/n=12k\Rightarrow$ $\exists k\in\mathbb{N}/n=3\times(4k)$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}/n=3\times k'$ avec : $k'=4k\in\mathbb{N}\Rightarrow$ n est divisible par 3

$\overline{R}$: $\exists n\in\mathbb{N}$ « n est multiple de 12 *et* n n'est pas divisible par 3 »

Exercice2 : (7pts) : $\left(2\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}\right)$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right):\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

b) Déduire que : $\left(\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right):\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{a+c}{b^2}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

2) Montrer que la proposition : « $\left(\forall(n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..+\frac{1}{n+m}\in\mathbb{N}$ » est fausse

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4]\Rightarrow x^2-3x-4>0$

4) Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Solution : : 1) a) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}$

$$\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}=\frac{x^2-y^2}{xy^2}+\frac{y^2-x^2}{x^2y}=\frac{x^2-y^2}{xy}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{(x-y)(x+y)}{xy}\left(\frac{x-y}{xy}\right)=\frac{(x-y)^2(x+y)}{(xy)^2}\geq 0$$ car : $(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}$

Donc : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right):\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

b) Déduisons que : $\left(\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right):\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{a+a}{b^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{a+c}{b^2}=\left(\frac{a}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)+\left(\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\right)+\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)$$

D'après 1) a) on a : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right):\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Donc : $\frac{a}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ ❶ et $\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\geq\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ❷ et $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ❸

La somme des inégalités ❶et❷ et❸ membre a membre donnent :

$$\left(\frac{a}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)+\left(\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\right)+\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

C'est-à-dire : $\left(\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right):\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{a+a}{b^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

2) La négation de cette proposition : « $\left(\exists(n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..+\frac{1}{n+m}\notin\mathbb{N}$ » est vraie

$$\left(\exists(n=1;m=1)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\notin\mathbb{N}$$

Par suite : la proposition : « $\left(\forall(n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..+\frac{1}{n+m}\in\mathbb{N}$ » est fausse

3) Soit $x\in\mathbb{R}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $x^2-3x-4\leq 0\Rightarrow x\in[-1;4]$

$\Delta=(-3)^2-4\times(-4)=9+16=25\succ 0$

Donc : deux racines : $x_1=\frac{3+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{25}}{2}=\frac{3-5}{2}=-1$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2-3x-4\leq 0$ *si* $x\in[-1;4]$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2-3x-4\leq 0 \Rightarrow x\in[-1;4]$

Alors : Par contraposition :

$\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4] \Rightarrow x^2-3x-4>0$

4) Nous raisonnons par équivalence : Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

$a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(a\times b+a\times c+b\times c)$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a\times b-2a\times c-2b\times c\geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2-2a\times b+b^2)+(a^2-2a\times c+c^2)+(b^2-2b\times c+c^2)\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

5) Méthode : Soit P une proposition mathématique.
Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que : n^2+1 n'est pas un carré parfait.
Par l'absurde, supposons que n^2+1 est un carré parfait
Donc :il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que : $n^2+1=m^2$

On a : $n^2 \prec n^2+1$ et $n^2+1\prec(n+1)^2$ (car $(n+1)^2-n^2+1=2n\succ 0$)

C'est-a-dire : $n^2\prec n^2+1\prec(n+1)^2$

Donc : $n^2\prec m^2\prec(n+1)^2$

Par suite : $n\prec m\prec n+1$

C'est-à-dire : il existe un entier naturel strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Exercice3 : (2,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soit $n\in\mathbb{N}$: On pose : $U_n=n4^{n+1}-(n+1)4^n+1$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre : $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Solution :1) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$

Soit : $n\in\mathbb{N}$ On a : $U_{n+1}=n4^{n+2}-(n+2)4^{n+1}+1$

$4U_n+3(4^{n+1}-1)=4(n4^{n+1}-(n+1)4^n+1)+3(4^{n+1}-1)=4n4^{n+1}-4(n+1)4^n+4+3\times4^{n+1}-3$

$=n4^{n+2}-(n+1)4^{n+1}+3\times4^{n+1}+1=n4^{n+2}+(-n-1+3)4^{n+1}+1=n4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1$

$=(n+1-1)4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-4\times4^{n+1}+(2-n)4^{n+1}+1$

$=(n+1)4^{n+2}+(2-n-4)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-(2+n)4^{n+1}+1$

Donc : $4U_n+3(4^{n+1}-1)=n4^{n+2}-(n+2)4^{n+1}+1=U_{n+1}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $\alpha_0=4^{0+1}-1=4-1=3=3\times1$ et $2n+3=2\times0+3=3$

Le nombre α_0 est divisible par 3

Donc P(0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/\alpha_n=4^{n+1}-1=3k$

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^{n+1} = 3k+1$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / \alpha_{n+1} = 4^{n+2} - 1 = 3k'$

$\alpha_{n+1} = 4^{n+2} - 1 = 4^{n+1} \times 4 - 1 = (3k+1) \times 4 - 1$

$\alpha_{n+1} = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1) = 3k'$ avec $k' = 4k+1 \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre $\alpha_n = 4^{n+1} - 1$ est divisible par 3

3) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $U_0 = 0 \times 4^{0+1} - (0+1)4^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ et 9divise 0
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / U_n = 9k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'' \in \mathbb{N} / U_{n+1} = 9k''$??

On a : $U_{n+1} = 4U_n + 3(4^{n+1} - 1)$ et $\exists k \in \mathbb{N} / U_n = 9k$ et on a aussi : $\exists k' \in \mathbb{N} / \alpha_n = 4^{n+1} - 1 = 3k'$

Donc : $U_{n+1} = 4 \times 9k + 3 \times 3k' = 9(4k + k') = 9k''$ avec $k'' = 4k + k' \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Exercice4 : (3,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$: Soit L'application f : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x + 2 \end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x) = 0$
2) f est-elle surjective ?
3) f est-elle injective ? justifier
4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

Solution :1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = 4 - 8 = -4 \prec 0$

Donc : $S = \varnothing$

2) $f(x) = 0$ n'a pas de solutions donc $0 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédents
Donc : f n'est est-pas surjective
3) Méthode : pour les fonctions : $f(x) = ax^2 + bx + c$

$2 = c \in \mathbb{R}$ (Ensemble d'arrivé) : on Recoud l'équation $f(x) = 2$

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ \ x = -2$

Donc : $f(0) = 2 = f(-2)$ mais $0 \neq -2$
Donc : f n'est pas injective
4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

a) $f([-1;+\infty[) = ?$

$f(x) = x^2 + 2x + 2$ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$f(x)=(x^2+2x)+2=(x+1)^2-1^2+2=(x+1)^2+1$

Remarque : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ et $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$f([-1;+\infty[)=\{f(x)/x\in[-1;+\infty[\}$

$x\in[-1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq -1\Leftrightarrow x+1\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq 1$

$x\in[-1;+\infty[\Leftrightarrow f(x)\in[1;+\infty[$

$f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$

b) $f^{-1}([5;10])$

$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[5;10]\}=\{x\in\mathbb{R}/5\leq f(x)\leq 10\}$

$x\in f^{-1}([5;10])\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ 5\leq f(x)\leq 10\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ 5\leq (x+1)^2+1\leq 10\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ 4\leq (x+1)^2\leq 9$

$x\in f^{-1}([5;10])\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ 2\leq |x+1|\leq 3\Leftrightarrow 2\leq x+1\leq 3\, ou\ 2\leq -x-1\leq 3\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2\ ou\ 3\leq -x\leq 4$

$x\in f^{-1}([5;10])\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2\ ou\ -4\leq x\leq -3\Leftrightarrow x\in[1;2]\, ou\ x\in[-4;-3]$

Donc : $f^{-1}([5;10])=[1;2]\cup[-4;-3]$

Exercice5 : (4,5pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+2\text{pts})$

Soient les applications : $\begin{aligned} f:\ ]1;+\infty[&\to\ ]1;+\infty[\\ x &\mapsto 1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\end{aligned}$ et $\begin{aligned} g:\ ]1;+\infty[&\to\ ]1;+\infty[\\ x &\mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2\end{aligned}$

1) Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a) Vérifier que : $\forall x\in\ ]1;+\infty[: g(x)=(f(x))^2$

3)b) En déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $x\in[2;4[\Leftrightarrow 2\leq x\prec 4\Leftrightarrow \sqrt{2}-1\leq\sqrt{x}-1\prec 1\Leftrightarrow 1\prec\frac{1}{\sqrt{x}-1}\leq\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Leftrightarrow 3\prec f(x)\leq 3+2\sqrt{2}$

Donc : $f([2;4[)=\left]3;3+2\sqrt{2}\right]$

$g^{-1}(\{9\})=\{x\in\ ]1;+\infty[\ /g(x)\in\{9\}\}=\{x\in\ ]1;+\infty[\ /g(x)=9\}$

$g^{-1}(\{9\})=\{x\succ 1/\sqrt{x}=2\}=\{x\succ 1/x=4\}=\{4\}$

2)Montrons que f est injective ?

Soient $x_1\in\ ]1;+\infty[$ et $x_2\in\ ]1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{x_1}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x_2}-1}\Rightarrow\sqrt{x_1}-1=\sqrt{x_2}-1\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

Soit $y\in]1;+\infty[$; $y=f(x)\Leftrightarrow y=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$

$\Leftrightarrow y-1=\frac{2}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=\frac{2}{y-1}\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{2}{y-1}+1=\frac{2+y-1}{y-1}=\frac{y+1}{y-1}$

$y=f(x)\Leftrightarrow x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$ et on a : $\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2-1=\left(\frac{y+1}{y-1}-1\right)\left(\frac{y+1}{y-1}+1\right)=\frac{4y}{(y-1)^2}\succ 0$

Donc : $\forall y\in]1;+\infty[\ \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2\succ 1$

Donc : $(\forall y\in]1;+\infty[)(\exists x\in]1;+\infty[)/\ x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$ et $y=f(x)$

Donc : que f est surjective de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=y \\ y\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

Donc : $f^{-1}:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$
$x\mapsto \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

3)a) Vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[: (f(x))^2=\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)^2=g(x)$

3)b) On a : $g=h\circ f$ avec $h(x)=x^2\ \forall x\in]1;+\infty[$:

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ alors $g=h\circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et on a : $g^{-1}(x)=(h\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ h^{-1}(x)=f^{-1}(h^{-1}(x))=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2=g(x)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien