http://www.xriadiat.com **DS1: K** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) : $\left(0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts}\right)$

Montrer par Le raisonnement par contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses

1) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ 2) $Q:\ ((\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):2x-4y\neq 5$

3) $R:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x-y=1\Rightarrow x\succ 1$

Solution :1) $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\prec 2$ est vraie car : $\left(\exists x=-1\in\mathbb{R}^*\right):-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$

Par suite : $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ est fausse.

2) $\overline{Q}:\ ((\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):2x-4y=5$ par exemple on prend : $y=0$ et $x=\frac{5}{2}$: $2\times\frac{5}{2}-4\times 0=5$

Donc : $\overline{Q}$:est vraie Par suite : Q : est fausse.

3) $R:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x-y=1\Rightarrow x\succ 1$

$\overline{R}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x-y=1\ et\ x\leq 1$ par exemple on prend : $y=0$ et $x=1$: $x-1=1$ et $1\leq 1$

Donc : $\overline{R}$:est vraie Par suite : R : est fausse.

Exercice2 : (7,5pts) : $\left(1{,}5\text{pts}\times 5\right)$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq y\ et\ x+y\neq 1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

2) Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\leq\sqrt{2}$

3) Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{Z}:\frac{8n+2025}{10}\notin\mathbb{Z}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante $(I):\ \sqrt{x+4}\succ x+1$

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Solution : 1) Soient : $x\in\mathbb{R}$et $y\in\mathbb{R}$: Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x+y=1$

On a : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\ \Rightarrow x^2-x+1=y^2-y+1$

$\Rightarrow x^2-y^2-(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-1)=0\Rightarrow x-y=0\ \ ou\ \ x+y-1=0$

$\Rightarrow x=y\ \ ou\ \ x+y=1$

Donc : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x+y=1$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq y\ et\ x+y\neq 1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

2) Supposons que : $a^2+b^2=1$ Or on sait que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}$:$(a-b)^2\geq 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors :
$1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

Donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ alors : $|a+b|\leq\sqrt{2}$

3) Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que : $\frac{8n+2025}{10}\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{Z}$ et $\exists m\in\mathbb{Z}$ tel que : $\frac{8n+2025}{10}=m$

$\frac{8n+2025}{10}=m\Leftrightarrow 8n+2025=10m\Rightarrow 2025=10m-8n\Rightarrow 2025=2(5m-4n)\Rightarrow 2025=2k$

avec $k=5m-4n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 2025$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 2025 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{4n+2026}\notin\mathbb{N}$

4) On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I): $\sqrt{x+4}\succ x+1$

$D=\{x\in\mathbb{R}/x+4\geq 0\}=[-4;+\infty[$

$x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$

Soit $x\in[-4;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I)

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x+4}\succ x+1$

1 cas : si $x+1\prec 0\Leftrightarrow x\prec -1$

Donc : l'Inéquation est vraie pour tout $x\in[-4;-1[$

Donc $S_1=[-4;-1[$

2 cas : si $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$ alors $x+1\geq 0$

$\sqrt{x+4}\succ x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2\succ(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+4-(x^2+2x+1)\succ 0\Leftrightarrow -x^2-x+3\succ 0\Leftrightarrow x^2+x-3\prec 0$; $\Delta=1-4(-3)=13$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\approx 7,3$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\approx 3,7$

$x^2+x-3\prec 0\Leftrightarrow x\in\left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$ Donc $S_2=\left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[\cap[-1;+\infty[=\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

Donc : $S=S_1\cup S_2=[-4;-1[\cup\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[=\left[-4;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

5) Notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$;

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+1+1}=\frac{n+1}{n+2}$??

On a : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}==\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Donc $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

Donc : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+2}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Exercice3 : (2pts) : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.
Simplifier les expressions suivantes :

a) $A\cap(A\cup B)$ b) $[A\cup(A\cap B)]\cup B$ c) $(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$

Solution : a) $A\cap(A\cup B)=(A\cap A)\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B)=A$ car $A\cap B\subset A$

b) $[A\cup(A\cap B)]\cup B=(A\cup B)\cup(A\cap B)=A\cup B$ car $A\cap B\subset A\cup B$

c) $(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=A\cap(\overline{B}\cup B)=A\cap E=A$

Exercice4 : (8,5pts) : $(2\text{pts}+2\text{pts}+1{,}5\text{pts}+2\text{pts}+1\text{pts})$

Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\frac{x|x|}{x^2+1}\end{aligned}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) Montrer que f est injective

3) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

b) Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : $f(x)=\frac{x|x|}{x^2+1}$ 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $x\geq 0$: $|x|=x$ et $f(x)=\frac{x\times x}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$

$$1-f(x)=1-\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\succ 0$$ donc : $f(x)\prec 1$

$f(x)-(-1)=\frac{x^2}{x^2+1}+1=\frac{x^2+x^2+1}{x^2+1}=\frac{2x^2+1}{x^2+1}\succ 0$ donc : $-1\prec f(x)$ C'est-à-dire : $\forall x\geq 0$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Si : $x \prec 0$: $|x| = -x$ et $f(x) = \frac{-x \times x}{x^2+1} = \frac{-x^2}{x^2+1}$

On déjà montrer que : $-1 \prec \frac{x^2}{x^2+1} \prec 1$ (on procède comme précédemment)

Donc : $-1 \prec -\frac{x^2}{x^2+1} \prec 1$ C'est-à-dire : $\forall x \prec 0$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Donc : L'application f n'est pas surjective car 2 par exemple n'a pas d'antécédent par f

2) Montrons que f est injective :Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1} = \frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1}$ *est vraie* $\Rightarrow x_1$ *et* x_2 Ont le même signe.

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $x_1 = 0$ alors : $\frac{0 \times |0|}{0^2+1} = \frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1} \Rightarrow 0 = x_2|x_2| \Rightarrow 0 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Si : $x_1 \succ 0$ et $x_2 \succ 0$ $\Rightarrow \frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1} = \frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2}{x_2^2+1} \Rightarrow x_1^2(x_2^2+1) = x_2^2(x_1^2+1)$

$\Rightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2 = x_2^2x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ et comme : $x_1 \succ 0$ et $x_2 \succ 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Si : $x_1 \prec 0$ et $x_2 \prec 0$ $\Rightarrow \frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1} = \frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1} \Rightarrow \frac{-x_1^2}{x_1^2+1} = \frac{-x_2^2}{x_2^2+1} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2}{x_2^2+1}$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ et comme : $x_1 \prec 0$ et $x_2 \prec 0$ $\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc : $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall x_2 \in \mathbb{R}$: $\frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1} = \frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

3) Déterminons : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$: $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}\right\}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x|x| + 1 = 0$

Si : $x \geq 0$ $x^2 - 2x \times x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \cancel{x=-1}$ *ou* $x = 1$

Puisque : $x \geq 0$ $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Si : $x \prec 0$: $x^2 + 2x \times x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$ pas de solutions

Conclusion : $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ Par suite : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{1\}$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Soit : $y \in]-1,1[$: Montrons que : $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x|x|}{x^2+1} = y$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $y = 0$ alors $\dfrac{x|x|}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc : $\exists! x = 0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = 0$

Si : $y \in]0,1[$ alors $\dfrac{x|x|}{x^2+1} = y \Rightarrow x \succ 0$

$\dfrac{x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow x^2 = (x^2+1)y \Leftrightarrow x^2 - x^2 y = y \Leftrightarrow x^2(1-y) = y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y}{1-y} \succ 0$ car : $y =]0,1[$

$\dfrac{x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ car : $x \succ 0$

Donc : Si : $y \in]0,1[$ alors $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Si : $y \in]-1,0[$ alors $-1 \prec y \prec 0$ Donc : $\dfrac{x|x|}{x^2+1} = y \Rightarrow x \prec 0$

$\dfrac{-x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow -x^2 = (x^2+1)y \Leftrightarrow -x^2 - x^2 y = y \Leftrightarrow -x^2(1+y) = y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-y}{1+y} \succ 0$ car : $-1 \prec y \prec 0$

$-\dfrac{x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow x = -\sqrt{\dfrac{-y}{1+y}}$ car : $x \prec 0$

Donc : Si : $y \in]-1,0[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Conclusion : $\forall y \in]-1,1[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Par suite : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Résumé : Si : $y \in [0,1[$ $f(x) = y \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}} = f^{-1}(y)$

Si : $y \in]-1,0[$ $f(x) = y \Leftrightarrow x = -\sqrt{\dfrac{-y}{1+y}} = f^{-1}(y)$

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $\begin{aligned}]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \, si \;\; x \in [0,1[\\ -\sqrt{\dfrac{-x}{1+x}} \, si \;\; x \in]-1,0[\end{cases} \end{aligned}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien