http://www.xriadiat.com **DS1: L** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) : $\left(1\text{pt}+1\text{pt}\right)$

On considère la proposition suivante : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R}):x<6\Rightarrow x^2<36$

1) Ecrire la négation de P

2) En utilisant un raisonnement par contre-exemple, Montrer que P est fausse.

Solution :1) On a : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R}):x<6\Rightarrow x^2<36$ alors : $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}):x<6\ \ et\ \ x^2\geq 36$

Car : $\overline{P_1\Rightarrow P_2}\Leftrightarrow P_1\ et\ \overline{P_2}$

2) On a : $\overline{P}$ est vraie car $(\exists -7\in\mathbb{R}):-7<6\ \ et\ \ (-7)^2=49\geq 36$

Par suite : P est une proposition fausse. (-7 est le contre-exemple)

Exercice2 : (3pts) : $\left(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}\right)$

1) Soit $a\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall\varepsilon\succ 0:a\prec\varepsilon$

Montrer que : $a=0$

2) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\varepsilon\succ 0:|a-b|\prec\varepsilon$

Montrer que : $a=b$

3) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

Montrer que : $a\leq b\Leftrightarrow\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon$

Solution :1) Soit $a\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall\varepsilon\succ 0:a\prec\varepsilon$

Montrons que : $a=0$

Supposons : $a\neq 0$ et comme : $a\in\mathbb{R}^+$ alors : $a\succ 0$

et puisque : $\forall\varepsilon\succ 0:a\prec\varepsilon$ on prend : $\varepsilon=a\succ 0$ on aura donc : $a\prec a$ contradiction

Donc : $a=0$

2) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\varepsilon\succ 0:|a-b|\prec\varepsilon$: Montrons que : $a=b$

Supposons : $a\neq b$ alors : $|a-b|\succ 0$

et puisque : $\forall\varepsilon\succ 0:|a-b|\prec\varepsilon$ on prend : $\varepsilon=|a-b|\succ 0$ on aura donc : $|a-b|\prec|a-b|$

contradiction et donc : $a=b$

3) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$) Montrons que : $a\leq b\Rightarrow\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon$?

Supposons : $a\leq b$ et Supposons $\exists\varepsilon\succ 0/a\geq b+\varepsilon$

Alors : $\exists\varepsilon\succ 0/a-b\geq\varepsilon\succ 0$

Alors : $a-b\succ 0$ c'est-à-dire : $a\succ b$ contradiction avec $a\leq b$

Donc : $a\leq b\Rightarrow\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon$

$\Leftarrow$) Montrons que : $\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon\Rightarrow a\leq b$?

$\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon\Rightarrow\forall\varepsilon\succ 0:a-b\prec\varepsilon$

Supposons $a-b\succ 0$ on prend : $\varepsilon=a-b\succ 0$ et puisque : $\forall\varepsilon\succ 0:a-b\prec\varepsilon$ alors $a-b\prec a-b$ contradiction.

$\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon\Rightarrow a\leq b$

Conclusion : $a\leq b\Leftrightarrow\forall\varepsilon\succ 0:a\prec b+\varepsilon$

Exercice3 : (2 ,5pts) :

Montrer par disjonction des cas : que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3.

Solution : Soit $n\in\mathbb{N}$: $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=n(n-1)(n+1)$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k$: $n^3-n=3k(3k-1)(3k+1)=3\left(k(3k-1)(3k+1)\right)=3k'$ avec : $k'=k(3k-1)(3k+1)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+1$: $n^3-n=(3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$

$=(3k+1)(3k)(3k+2)=3\left(k(3k+1)(3k+2)\right)=3k'$ avec : $k'=k(3k+1)(3k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n=3k+2$

$n^3-n=(3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1)=(3k+2)(3k+1)(3k+3)=3\left((k+1)(3k+1)(3k+2)\right)=3k'$

Avec : $k'=(k+1)(3k+1)(3k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par

Disjonction des cas le nombre n^3-n est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice4 : (2,5pts) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose a_n le nombre formé de n nombres égaux à 7

(C'est-à-dire : $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}$ par exemple : $a_1=7$ et $a_2=77$; $a_4=7777$)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$.

Solution : Notons P(n) La proposition " $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $a_1=7$ et $\frac{7}{9}\left(10^1-1\right)=7$ donc $7=7$.

Donc : P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $a_{n+1}=\frac{7}{9}\left(10^{n+1}-1\right)$??

On a : $a_{n+1}=7\times10^n+\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}=7\times10^n+a_n$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$

Donc $a_{n+1}=7\times10^n+\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)=\frac{7}{9}\left(9\times10^n+10^n-1\right)=\frac{7}{9}\left(10\times10^n-1\right)=\frac{7}{9}\left(10^{n+1}-1\right)$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$.

Exercice5 : (4,5pts) : $(1\text{pts}+2\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$; $F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^3+y^3=1\}$ et $I=[-1;1]$

1) Montrer que : $E\neq\varnothing$ et $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrer que : $E\subset I\times I$ et $E\neq I\times I$

Solution : 1) On a : $(0;1)\in E$ car : $0^2+1^2=1$ donc : $E\neq\varnothing$

On a : $(0;1)\in F$ car : $0^3+1^3=1$ donc : $F\neq\varnothing$

2) Montrons par double inclusion que : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

a) Montrons que : $(x;y)\in\{(1;0);(0;1)\}$?

Soit : $(x;y)\in E\cap F$: Donc : $(x;y)\in E$ *et* $(x;y)\in F$

Donc : $x^2+y^2=1$ et $x^3+y^3=1$

Donc : $x^2+y^2=x^3+y^3$

Donc : $x^2+y^2-x^3-y^3=0$

Donc : $x^2(1-x)+y^2(1-y)=0$ et comme : $x^2\leq x^2+y^2=1$ et $y^2\leq x^2+y^2=1$

Alors : $x^2\leq1$ et $y^2\leq1$

Alors : $|x|\leq1$ et $|y|\leq1$

Alors : $0\leq1-x$ et $0\leq1-y$

Donc : $\underbrace{x^2(1-x)}_{\geq0}+\underbrace{y^2(1-y)}_{\geq0}=0$

Donc : $x^2(1-x)=0$ et $y^2(1-y)=0$

Donc : $(x=0 \text{ ou } x=1)$ et $(y=0 \text{ ou } y=1)$

Donc : $(x=0 \text{ et } y=0)$ ou $(x=0 \text{ et } y=1)$ ou $(x=1 \text{ et } y=0)$ ou $(x=1 \text{ et } y=1)$

Donc : $(x;y)=(0;0)$ ou $(x;y)=(0;1)$ ou $(x;y)=(1;0)$ ou $(x;y)=(1;1)$

Mais : $(x;y)\in E\cap F$ donc : $(x;y)=(0;0)$

$(0;0)\notin E$ Car : $0^2+0^2\neq1$ et $(1;1)\notin E$ Car : $1^2+1^2\neq1$

Donc : $(x;y)\in\{(1;0);(0;1)\}$.

a) Montrons que : $\{(1;0);(0;1)\}\subset E\cap F$?

On a : $(0;1)\in E$ et $(0;1)\in F$ car : $0^2+1^2=1$ Et $0^3+1^3=1$

Et on a : $(1;0)\in E$ et $(1;0)\in F$ car : $0^2+1^2=1$ Et $0^3+1^3=1$

Donc : $\{(1;0);(0;1)\}\subset E\cap F$

Par suite : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrons que : $E\subset I\times I$ avec : $I=[-1;1]$

Soit : $(x;y)\in E$: donc : $x^2+y^2=1$ et comme : $x^2\leq x^2+y^2=1$ et $y^2\leq x^2+y^2=1$

Alors : $x^2\leq1$ et $y^2\leq1$

Alors : $|x|\leq1$ et $|y|\leq1$

Alors : $-1 \le x \le 1$ et $-1 \le y \le 1$

Donc : $x \in I$ et $y \in I$

Donc : $(x;y) \in I \times I$ par suite : $E \subset I \times I$

b) Comme : $(1;1) \in I \times I$ et $(1;1) \notin E$ $(1^2 + 1^2 \ne 1)$

Alors : $I \times I \not\subset E$ et par suite : $E \ne I \times I$

Exercice6 : (5,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+2{,}5\text{pts})$

Soit l'ensemble : $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y - x + 1 \ge 0\}$

Et soit l'application f : $\begin{array}{l}]1;+\infty[\times \mathbb{R} \to D \\ (x;y) \mapsto (2x+y\ ; x^2+y) \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est Surjective

3) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Solution : 1) Soit : $(x;y)$; $(x';y') \in]1;+\infty[\times \mathbb{R}$

Tel que : $f(x;y) = f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y) = (x';y')$??

$f(x;y) = f(x';y') \Leftrightarrow (2x+y\ ; x^2+y) = (2x'+y'\ ; x'^2+y')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 2x'+y' \\ x^2+y = x'^2+y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-x') = y'-y & (1) \\ x^2 - x'^2 = y'-y & (2) \end{cases}$ $(1)\,et\,(2) \Rightarrow x^2 - x'^2 = 2(x-x')$

$\Rightarrow (x-x')(x+x') - 2(x-x') = 0 \Rightarrow (x-x')(x+x'-2) = 0$

$\Rightarrow x - x' = 0 \ \ ou \ \ x + x' - 2 = 0 \Rightarrow x = x' \ \ ou \ \ x + x' = 2$

On a : $(x;y)$; $(x';y') \in]1;+\infty[\times \mathbb{R}$ donc : $x \in]1;+\infty[$ et $x' \in]1;+\infty[$

Donc : $x \succ 1$ et $x' \succ 1$

Donc : $x + x' \succ 2$ par suite ; $x + x' \ne 2$ et donc : $x = x'$

$2(x-x') = y'-y \ \ (1) \Rightarrow 0 = y' - y \Rightarrow y = y' \Rightarrow (x;y) = (x';y')$

Donc : f est injective

2) Soient $(a;b) \in D$: Résolvons l'équation : $f(x;y) = (a;b)$ dans : $]1;+\infty[\times \mathbb{R}$

$\begin{cases} f(x;y) = (a;b) \\ ]1;+\infty[\times \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (2x+y\ ; x^2+y) = (a\ ;\ b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = a \\ x^2+y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = b - a \\ y = b - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - b + a = 0 \\ y = b - x^2 \end{cases}$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-b+a) = 4 + 4b - 4a = 4(1+b-a) \ge 0$

Comme : $(a;b) \in D$ Donc : $1 + b - a \ge 0$ et donc : $\Delta = 4(1+b-a) \ge 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$x = \dfrac{2+\sqrt{4(1+b-a)}}{2} = 1 + \sqrt{1+b-a} \in]1;+\infty[$ ou $x = \dfrac{2-\sqrt{4(1+b-a)}}{2} = 1 - \sqrt{1+b-a} \notin]1;+\infty[$

Et il suffit de remplacer x dans : $y = b - x^2$ pour trouver y :

Donc : $y = b - \left(1 + \sqrt{1+b-a}\right)^2 \in \mathbb{R}$

Donc : $\forall (a;b) \in D$; $\exists (x;y) \in]1;+\infty[\times \mathbb{R}$ $f(x;y) = (a;b)$

Alors f est Surjective

f est une bijection de $]1;+\infty[\times\mathbb{R}$ vers D

$$\begin{cases} f(x;y)=(a;b) \\ ]1;+\infty[\times\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(a;b)=(x;y) \\ y\in D \end{cases}$$

$f^{-1}(a;b)=\left(1+\sqrt{1+b-a};b-\left(1+\sqrt{1+b-a}\right)^2\right)$ Donc : $\begin{array}{l} f^{-1}:]1;+\infty[\times\mathbb{R}\to D \\ (x;y)\mapsto\left(1+\sqrt{1+y-x};y-\left(1+\sqrt{1+y-x}\right)^2\right) \end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien