

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir surveiller n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS : Durée : 2 heures

(La correction voir 😊 <http://www.xriadiat.com>)

Exercice1 : (4pts) ; Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et donner la négation des 4 premiers propositions :

- 1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}); x - y = 2024$
- 2) $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty; 2[); 3x^2y - x + 2y = 0$
- 3) $P_3 : (\forall x \in [0; 2])(\exists y \in [0; 1]); xy - x + 2y - 1 = 0$
- 4) $P_4 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x + 2023 < y^2$
- 5) $P_5 : (\exists! x \in [-1; 0]); x^2 + 4x + 1 = 0$

Exercice2 : (5pts) : (1pts+1,5pts+1,5pts+1pts)

- 1) a) Montrer que : $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2): |a+b| \leq |a| + |b|$
- b) Dédire que : $(\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3):$

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < c \Rightarrow |a| < c \text{ et } |b| < c$$

2) Montrer que :

$$(\forall x \in [1; +\infty])(\forall y \in [1; +\infty]): \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$$

3) Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$; Montrer que : le système suivant n'admet pas de solutions dans \mathbb{R}^3 :

$$(S): \begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$$

Exercice3 : (3,5pts) : (1pts+2,5pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{N}^* par :

$$f(1) = 0 \text{ et } f(n+1) = \frac{5f(n) - 3}{3f(n) - 1}$$

1) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) \neq 1$$

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g(n) = \frac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; g(n+1) - g(n) = 3$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) = 3n - 2$

c) Déterminer : $f(n)$ en fonction de $n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice4 : (4pts) : (1,5pts+1,5pts+1pts)

Soient les applications :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto x^2 - 3x + 2$$

1) a) Déterminer : $f(\{3\})$

b) Montrer que $f(]0; 2]) \subset \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

2) Déterminer : $g(]2; 3])$ et $g^{-1}(\{2\})$

3) L'application g est-elle injective ? justifier

Exercice5 : (3,5pts) : (2pts+1pts+0,5pts) ;

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit l'application : $x \mapsto \frac{2x}{1+|x|}$

1) Montrer que f est injective

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; |f(x)| < 2$

b) f est-elle surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

