http://www.xriadiat.com **DS1: K** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (4pts) ; Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et donner la négation des 4 premiers propositions :

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}); x - y = 2024$

2) $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty; 2[); 3x^2y - x + 2y = 0$

3) $P_3 : (\forall x \in [0;2])(\exists y \in [0;1]); xy - x + 2y - 1 = 0$

4) $P_4 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x + 2023 \prec y^2$

5) $P_5 : (\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$

Solution : 1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ existe-t-il y dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x - y = 2024$?

On a : $x - y = 2024 \Leftrightarrow y = x - 2024 \in \mathbb{Z}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y = x - 2024 \in \mathbb{Z}); x - y = 2024$

Donc : la proposition P_1 : est vraie.

$\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}); x - y \neq 2024$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$; existe-t-il y dans $]-\infty; 2[$ tel que : $3x^2y - x + 2y = 0$?

$3x^2y - x + 2y = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 + 2) = x \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{3x^2 + 2}$

Il reste à montrer que : $y \in]-\infty; 2[$

$y - 2 = \dfrac{x}{3x^2 + 2} - 2 = \dfrac{x - 6x^2 - 4}{3x^2 + 2} = -\dfrac{6x^2 - x + 4}{3x^2 + 2}$

On a : $6x^2 - x + 4 \succ 0$ car $\Delta = -47 \prec 0$ et $a = 6 \succ 0$ et on a : $3x^2 + 2 \succ 0$

Donc : $y - 2 \prec 0$ c'est-a-dire : $y \prec 2$

Par suite : la proposition P_2 : est vraie.

$\overline{P_2} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in]-\infty; 2[); 3x^2y - x + 2y \neq 0$

3) Soit $x \in [0;2]$; existe-t-il y dans $[0;1]$ tel que : $xy - x + 2y - 1 = 0$?

$xy - x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow xy + 2y = 1 + x \Leftrightarrow y(x + 2) = 1 + x \Leftrightarrow y = \dfrac{1 + x}{x + 2} = 1 - \dfrac{1}{x + 2}$

Il reste à montrer que : $y \in [0;1]$ Comme : $0 \le x \le 2$ alors : $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{x+2} \le \dfrac{1}{2}$ donc : $1 - \dfrac{1}{2} \le 1 - \dfrac{1}{x+2} \le 1 - \dfrac{1}{4}$

D'où : $y \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right] \subset [0;1]$

Par suite : la proposition P_3 : est vraie.

$\overline{P_3} : (\exists x \in [0;2])(\forall y \in [0;1]); xy - x + 2y - 1 \neq 0$

4) $P_4 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x + 2023 \prec y^2$

il suffit de prendre : $x = -2024$ et on trouve : $(\forall y \in \mathbb{R}); -1 \prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_4 : est vraie.

$\overline{P_4} : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + 2023 \geq y^2$

5) $P_5 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 y + 4xy + 1 = 0$

Si on prend : $y = 1$: on retrouve la proposition : $(\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$?

$\Delta = 16 - 4 = 12 \succ 0$: $x_1 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3} \approx -0,26 \in [-1;0]$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{3} \notin [-1;0]$

Par suite : $(\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$ est vraie

Conclusion : $P_9 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 y + 4xy + 1 = 0$ est vraie

$\overline{P_5} : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 y + 4xy + 1 = 0$

Exercice2 : (5pts) : $(1\text{pts}+1,5\text{pts}+1,5\text{pts}+1\text{pts})$

1) a) Montrer que : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : |a+b| \leq |a| + |b|$

b) Déduire que : $(\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3) : \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| \prec c \Rightarrow |a| \prec c \; et \; |b| \prec c$

2) Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[)(\forall y \in [1;+\infty[) : \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$

3)Soit :$(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$; Montrer que : le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$:(S):

$$\begin{cases} 2x - 3z \succ 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$$

Solution : 1) a) Montrons que : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : |a+b| \leq |a| + |b|$ (l'inégalité triangulaire)

Soit : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$|a+b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a| \times |b|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2|a| \times |b|$ car $|X|^2 = X^2$

$\Leftrightarrow 2ab \leq 2|a| \times |b| \Leftrightarrow ab \leq |ab|$ Comme $ab \leq |ab|$ est une proposition vraie : $X \leq |X|$

Alors $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : |a+b| \leq |a| + |b|$ est aussi vraie

b) Soit : $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$: Supposons que : $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| \prec c$

On a : $\left|\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right| \leq \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|a| \leq \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right|$ et comme : $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| \prec c$

Alors : $|a| \prec c$

On a aussi : $\left|\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right| \leq \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{b-a}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|b| \leq \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right|$ car $|a-b| = |b-a|$ et comme :

$\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| \prec c$ alors $|b| \prec c$

Conclusion : $\left(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right):\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow|a|\prec c\ et\ |b|\prec c$

2)Soit : $(x;y)\in\left([1;+\infty[\right)^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2\le\sqrt{xy}^2$

$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1\le xy\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{xy-x-y+1}+y-1\le xy$

$\Leftrightarrow 0\le xy-x-y+1-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2\Leftrightarrow 0\le\sqrt{xy-x-y+1}^2-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy-x-y+1}-1\right)^2\ge 0$ est une proposition vraie

Donc : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right)\left(\forall y\in[1;+\infty[\right):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}$

3) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$:Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases}2x-3z\succ 3\\3y-2x\ge 3\\y-z\le 2\end{cases}$

$\begin{cases}2x-3z\succ 3 & (1)\\3y-2x\ge 3 & (2)\\y-z\le 2\end{cases}\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}3y-3z\succ 6\\y-z\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-z\succ 2\\y-z\le 2\end{cases}\Rightarrow 2\prec y-z\le 2\Rightarrow 2\prec 2$: Ce qui est contradictoire

Donc : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$

Exercice3 : (3,5pts) : $(1\text{pts}+2{,}5\text{pts})$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $f(1)=0$ et $f(n+1)=\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f(n)\neq 1$

2)On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ g(n)=\frac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $g(n+1)-g(n)=3$

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $g(n)=3n-2$

c) Déterminer : $f(n)$ en fonction de n ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution : 1) Montrons par récurrence que : $P(n)$ « $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f(n)\neq 1$ »

1étapes : l'initialisation : Pour n = 1 nous avons : $f(1)=0\neq 1$

Donc $P(1)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n)\neq 1$

Montrons que : $f(n+1)\neq 1$ "??

On a : $f(n+1)-1=\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}-1=\frac{5f(n)-3-3f(n)+1}{3f(n)-1}=\frac{2f(n)-2}{3f(n)-1}=\frac{2\left(f(n)-1\right)}{3f(n)-1}$

et puisque : $f(n)\neq 1$ alors : $f(n)-1\neq 0$ et $f(n+1)-1\neq 0$ par suite : $f(n+1)\neq 1$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) \neq 1$ »

2)On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; g(n) = \dfrac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1) - g(n) = 3$

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(n+1)-g(n) = \frac{f(n+1)+1}{f(n+1)-1} - g(n) = \frac{\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}+1}{\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}-1} - g(n) = \frac{\frac{5f(n)-3+3f(n)-1}{3f(n)-1}}{\frac{5f(n)-3-3f(n)+1}{3f(n)-1}} - \frac{f(n)+1}{f(n)-1}$$

$$g(n+1)-g(n) = \frac{\frac{8f(n)-4}{3f(n)-1}}{\frac{2f(n)-2}{3f(n)-1}} - \frac{f(n)+1}{f(n)-1} = \frac{8f(n)-4}{2(f(n)-1)} - \frac{f(n)+1}{f(n)-1} = \frac{8f(n)-4-2f(n)-2}{2(f(n)-1)} = \frac{6(f(n)-3)}{2(f(n)-1)} = 3$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1) - g(n) = 3$

b) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $g(n) = 3n-2$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1) - g(n) = 3$

(1) Pour : $n = 1$; $g(2) - g(1) = 3$

(2) Pour : $n = 2$; $g(3) - g(2) = 3$

…

…

$(n-2)$ Pour : $n-2$; $g(n-1) - g(n-2) = 3$

$(n-1)$ Pour : $n-1$; $g(n) - g(n-1) = 3$

La des égalités membre a membre donne : $g(n) - g(1) = \underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{n-1\ fois} = 3(n-1)$

Donc : $g(n) = 3(n-1) - g(1)$ et $g(1) = \dfrac{f(1)+1}{f(1)-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$

Donc : $g(n) = 3(n-1)+1 = 3n-3+1 = 3n-2$

2)On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; g(n) = \dfrac{f(n)+1}{f(n)-1} \Leftrightarrow g(n)(f(n)-1) = f(n)+1 \Leftrightarrow g(n)f(n) - g(n) = f(n)+1$

$\Leftrightarrow f(n)(g(n)-1) = 1 + g(n)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) - 1 \neq 0$ car si : $\exists n \in \mathbb{N}^* : g(n) - 1 = 0$

$g(n) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(n)+1}{f(n)-1} = 1 \Leftrightarrow f(n)+1 = f(n)-1 \Leftrightarrow 1 = -1$ (Absurde)

$f(n) = \dfrac{1+g(n)}{g(n)-1} = \dfrac{1+3n-2}{3n-2-1} = \boxed{\dfrac{3n-1}{3n-3}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice4 : (4pts) : $(1,5\text{pts}+1,5\text{pts}+1\text{pts})$

Soient les applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x-\dfrac{1}{x}\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2-3x+2\end{array}$

1) a) Déterminer : $f(\{3\})$

b) Montrer que $f(]0;2])\subset\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) Déterminer : $g(]2;3])$ et $g^{-1}(\{2\})$

3) L'application g est-elle injective ? justifier

Solution : 1) a) $f(\{3\})=\{f(3)\}$

On a : $f(3)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ donc : $f(\{3\})=\left\{\frac{8}{3}\right\}$

b) $f(]0;2])$?

$x\in]0;2]\Leftrightarrow 0\prec x\leq 2\Leftrightarrow -2\leq -x\prec 0\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\leq-\frac{1}{2}$

$x\in]0;2]\Rightarrow x-\frac{1}{x}\leq-\frac{1}{2}+2\Rightarrow x-\frac{1}{x}\leq\frac{3}{2}\ \Rightarrow f(x)\leq\frac{3}{2}$

Donc : $x\in]0;2]\Rightarrow f(x)\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

Donc : $f(]0;2])\subset\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) Déterminons : $g(]2;3])$.

$g(x)=x^2-3x+2=x^2-2\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2$

$g(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$x\in]2;3]\Leftrightarrow 2\prec x\leq 3\Leftrightarrow 2-\frac{3}{2}\leq x-\frac{3}{2}\prec 3-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq x-\frac{3}{2}\prec\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\prec\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\leq\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\prec\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\ \Leftrightarrow 0\leq\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\prec 2$

$x\in]2;3]\Leftrightarrow 0\leq g(x)\prec 2\Leftrightarrow g(x)\in[0;2[$

Donc : $g(]2;3])=[0;2[$

$x\in g^{-1}(\{2\})\Leftrightarrow g(x)=2\Leftrightarrow x^2-3x+2=2\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ x=3$

Donc : $g^{-1}(\{2\})=\{0;3\}$

3) L'application g n'est pas injective car 2 a deux antécédents par g

Exercice5 : (3,5pts) : $\left(2\text{pts}+1\text{pts}+0{,}5\text{pts}\right)$; Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto \frac{2x}{1+|x|}\end{aligned}$

1) Montrer que f est injective

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|f(x)|\prec 2$

b) f est-elle surjective ?

Solution :1) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow \left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right|=\left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|\Rightarrow \frac{|x_1|}{1+|x_1|}=\frac{|x_2|}{1+|x_2|}\Rightarrow |x_1|\left(1+|x_2|\right)=|x_2|\left(1+|x_1|\right)$

$\Rightarrow |x_1||x_2|+|x_1|=|x_1||x_2|+|x_2|\Rightarrow |x_1|=|x_2|$

On remplace dans : $\frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow \frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_1|}\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

2) a) $f(x)=\frac{2x}{1+|x|}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: on a : $x\le |x|\prec |x|+1$

Donc : $2x\le 2|x|\prec 2\left(|x|+1\right)$

Donc : $\frac{2x}{1+|x|}\prec\frac{2\left(1+|x|\right)}{1+|x|}$

Donc : $\frac{2x}{1+|x|}\prec 2$ c'est-à-dire : $f(x)\prec 2$:

b) Par exemple : 2 n'admet pas d'antécédents

Donc f n'est pas surjective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien