http://www.xriadiat.com **DS1: J** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS : Durée :2 heures

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : (6,5pts) : $(1\text{pts}\times 3+2\text{pts}+1{,}5\text{pts})$ On considère les assertions suivantes :

P : "$(\forall x\in]0;+\infty[):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$"

Q : "$(\forall a\in]0;+\infty[;\forall b\in]0;+\infty[):\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$"

R : "$(\forall x\in [1;+\infty[):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$" ;

E : "$(\exists x\in \mathbb{R}_+^*):(x^2\prec x)$ ou $\left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$"

F : "$(\exists x\in \mathbb{R}_+^*):(x^2\prec x)$ ou $\left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$"

F : "$(\forall n\in \mathbb{N}^*):n\ne 1\Rightarrow n\ge 2$"

1) Montrer que P ; Q et R sont vraies (avec un raisonnement logique)

2) Donner : $\overline{P}$; $\overline{Q}$; $\overline{R}$; $\overline{E}$ et $\overline{F}$

3) Déterminer la valeur de vérité de E et F (justifier)

Exercice2 : (3,5pts) : $(2\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) Montrer que : $\forall x\in \mathbb{R}$; $\forall y\in \mathbb{R}$: $x\ne 0$ ou $y\ne 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\ne 0$

2)Montrer que : $\forall x\in \mathbb{R}$; $\forall y\in \mathbb{R}$; $\forall z\in \mathbb{R}$: $x+y\succ z\Rightarrow x\succ \frac{z}{2}$ ou $y\succ \frac{z}{2}$

Exercice3 : (1,5pts) : Montrer que : $\forall n\in \mathbb{N}$: $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Exercice4 : (2,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+1\text{pts})$

Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{2n+1}{4}/n\in \mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{5m+4}{3}/m\in \mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B=\varnothing$ 2) Montrer que : $B\cap \mathbb{N}\ne \varnothing$

Exercice5 : (4pts) : $(0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+3\text{pts})$ Soit l'application f : $\mathbb{R}\to \mathbb{R}$

Telle que : $\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

1) Montrer que : $f(0)=0$

2) Montrer que : $f(1)=0$ ou $f(1)=1$

3) On suppose que : $f(1)\ne 0$

a) Montrer que : $\forall n\in \mathbb{N}$; $f(n)=n$ b) Montrer que : $\forall m\in \mathbb{Z}$; $f(m)=m$

c) Montrer que : $\forall n\in \mathbb{N}^*$; $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ d) Montrer que : $\forall r\in \mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Exercice6 : (2pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts})$ Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{x}{1+|x|}\end{array}$

1) Montrer que f est injective 2) f est-elle surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien