http://www.xriadiat.com **DS1: J** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (6,5pts) : $(1\text{pts}\times 3+2\text{pts}+1{,}5\text{pts})$ On considère les assertions suivantes :

P :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$" Q :"$\left(\forall a\in\left]0;+\infty\right[;\forall b\in\left]0;+\infty\right[\right):\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$"

R :"$\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$" ; E :"$\left(\exists x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\prec x\right)$ ou $\left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$"

F :"$\left(\exists x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\prec x\right)$ ou $\left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$" F :"$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):n\neq 1\Rightarrow n\ge 2$"

1) Montrer que $P\ ;Q\ \ et\ \ R$ sont vraies (avec un raisonnement logique)

2) Donner : $\overline{P}\ ;\ \overline{Q}\ ;\overline{R}\ ;\ \overline{E}\ et\ \ \overline{F}$

3) Déterminer la valeur de vérité de $E\ \ et\ \ F$ (justifier)

Solution :1)a)Soit : $x\in\left]0;+\infty\right[$: Montrons que : $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$

$\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}\le 2+x\Leftrightarrow 0\le 1+x-2\sqrt{1+x}+1$

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{1+x}^2-2\sqrt{1+x}+1^2\Leftrightarrow 0\le\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2$

Donc : $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2$ (vraie)

P :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$" est vraie

b) Soit : $\left(a\in\left]0;+\infty\right[;b\in\left]0;+\infty\right[\right)$: Montrons que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\ge 0$(vraie)

Donc : Q :"$\left(\forall a\in\left]0;+\infty\right[;\forall b\in\left]0;+\infty\right[\right):\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$" est vraie

c)Soit : $x\in\left[1;+\infty\right[$; Montrons que : :$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$"

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}}\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{x}^2+1\ge 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}+1^2\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$ est vraie

Par suite : R :"$\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$" est vraie

2) P :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$" $\overline{P}$:"$\left(\exists x\in\left]0;+\infty\right[\right):\sqrt{1+x}\succ 1+\frac{x}{2}$"

Q :"$\left(\forall a\in\left]0;+\infty\right[;\forall b\in\left]0;+\infty\right[\right):\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$" $\overline{Q}$:"$\left(\exists a\in\left]0;+\infty\right[;\exists b\in\left]0;+\infty\right[\right):\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\prec 2$"

R :"$\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$" $\overline{R}$:"$\left(\exists x\in\left[1;+\infty\right[\right):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\prec 2$"

$\overline{E}:\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left[\left(x^2\geq x\right)\ et\ \left(x+\frac{1}{x}\geq 0\right)\right]$

$\overline{F}:\left(\exists n\in\mathbb{N}^*\right):n\neq 1\ et\ \ n\prec 2$

3) a) $\overline{E}:\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left[\left(x^2\geq x\right)\ et\ \left(x+\frac{1}{x}\geq 0\right)\right]$ est fausse : car$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\geq x\right)$ est fausse :

En effet : $\left(\exists x=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}_+^*\right)$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ Par suite : E:est vraie

b) $F:\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):n\neq 1\Rightarrow n\geq 2$ et $\overline{F}:\left(\exists n\in\mathbb{N}^*\right):n\neq 1\ et\ \ n\prec 2$: $\overline{F}$:est Faux

Par suite : F:est vraie

Exercice2 : (3,5pts) : $(2\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq 0\ \ ou\ \ y\neq 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\neq 0$

2)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$; $\forall z\in\mathbb{R}$: $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}$ ou $y\succ\frac{z}{2}$

Solution : 1) Montrons l'implication en raisonnant par contraposition :

Soit$(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrons que : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow x=0\ \ et\ \ y=0$

Supposons : $x^2+y^2+xy=0$ et Montrons que : $x=y=0$

On a : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+xy+xy=xy\\x^2+y^2+xy-xy=-xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2xy=xy\\x^2+y^2=-xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)^2=xy\\x^2+y^2=-xy\end{cases}$

Or : $(x+y)^2\geq 0$ et $x^2+y^2\geq 0$

Donc : $xy\geq 0\ \ et\ \ xy\leq 0$ par suite : $xy=0$

Donc : $x^2+y^2=0$ Donc : $x^2=-y^2$ Or : $x^2\geq 0$ et puisque $x^2=-y^2$ on a aussi : $x^2\leq 0$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2\geq 0\\x^2\leq 0\end{cases}\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$ et comme : $x^2+y^2=0$ alors : $y^2=0$ c'est-à-dire : $y=0$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow x=y=0$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0\Leftrightarrow x=y=0$

Finalement : par contraposition : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq 0\ \ ou\ \ y\neq 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\neq 0$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x+y\succ z$ et $x\leq\frac{z}{2}$ et $y\succ\frac{z}{2}$

$\begin{cases}x\leq\frac{z}{2}\\y\leq\frac{z}{2}\end{cases}\Rightarrow x+y\leq\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\Rightarrow x+y\leq z$ Ce qui est contradictoire avec : $x+y\succ z$

Donc : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}$ ou $y\succ\frac{z}{2}$

Exercice3 : (1,5pts) : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$:$3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :
$3\times 5^{2\times 0+1}+2^{3\times 0+1}=3\times 5+2^{1}=15+2=17$ et 17est un multiple de 17 ; Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N} / 3\times 5^{2n+3}+2^{3n+4}=7k'$??

$$3\times 5^{2n+3}+2^{3n+4}=3\times 5^{2}\times 5^{2n+1}+2^{3}\times 2^{3n+1}=3(17+8)\times 5^{2n+1}+8\times 2^{3n+1}$$
$$=3\times 17\times 5^{2n+1}+3\times 8\times 5^{2n+1}+8\times 2^{3n+1}$$
$$=3\times 17\times 5^{2n+1}+8\left(3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\right)=3\times 17\times 5^{2n+1}+8\times 17k$$
$$=17\times\left(3\times 5^{2n+1}+8k\right)=17k' \quad \text{avec : } k'=3\times 5^{2n+1}+8k\in\mathbb{N}$$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Exercice4 : (2,5pts) : $(1,5\text{pts}+1\text{pts})$

Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{2n+1}{4} / n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{5m+4}{3} / m\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B=\varnothing$
2) Montrer que : $B\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$

Solution : 1) On suppose par l'absurde que : $A\cap B\neq\varnothing$

Alors il existe : $x\in A\cap B$ tel que : $\exists(n;m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que : $x=\frac{2n+1}{4}=\frac{5m+4}{3}$

Donc : $\frac{2n+1}{4}=\frac{5m+4}{3}$

Donc : $6n+3=20m+16\Rightarrow 6n-20m=13 \Rightarrow 3n-10m=\frac{13}{2}\notin\mathbb{Z}$

Ce qui est absurde car : $3n-10m\in\mathbb{Z}$
Donc : $A\cap B=\varnothing$

2) On a : $3\in B$ en effet : $\frac{5m+4}{3}=3\Leftrightarrow 5m+4=9\Leftrightarrow 5m=5\Leftrightarrow m=1\in\mathbb{Z}$

Donc : $3=\frac{5\times 1+4}{3}$ et $1\in\mathbb{Z}$

On a donc : $3\in\mathbb{N}$ et $3\in B$ c'est-à-dire : $3\in B\cap\mathbb{N}$
Donc $B\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$

Exercice5 : (4pts) : $(0,5\text{pts}+0,5\text{pts}+3\text{pts})$ Soit l'application f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Telle que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{2}$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

1) Montrer que : $f(0)=0$

2) Montrer que : $f(1)=0$ ou $f(1)=1$

3) On suppose que : $f(1)\neq 0$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $f(n)=n$ b) Montrer que : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ d) Montrer que : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Solution : 1) On a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{2}$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Pour : $x=0$ et $y=0$

On a donc : $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)+0=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

2) On a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

Pour : $x=1$ et $y=1$

On a donc : $f(1\times1)=f(1)\times f(1)$

$\Rightarrow f(1)=f(1)\times f(1)\Rightarrow f(1)-f(1)\times f(1)=0\Rightarrow f(1)(1-f(1))=0\Rightarrow 1-f(1)=0\ ou\ f(1)=0$

$\Rightarrow f(1)=1\ ou\ f(1)=0$

3) On suppose que : $f(1)\neq0$

a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $f(n)=n$

Notons P(n) La proposition : ‘ $f(n)=n$ ’

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $f(0)=0$

Donc : P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $f(n)=n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $f(n+1)=n+1$??

$f(n+1)=f(n)+f(1)$ Mais on a : $f(n)=n$ et $f(1)=1$

Alors : $f(n+1)=n+1$

Donc : P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $f(n)=n$

b) Montrons que : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

Soit : $m\in\mathbb{Z}$

Cas1 : Si $m\in\mathbb{N}$ d'après a) on a : $f(m)=m$

Cas2 : Si $m\in\mathbb{Z}^-$ alors : $-m\in\mathbb{N}$

Donc : $f(-m)=-m$ et on a aussi : $f(m+(-m))=f(0)=0$

Donc : $f(m)+f(-m)=0$

Donc : $f(m)=-f(-m)=-(-m)=m$

Donc dans tous les cas : $f(m)=m$

Conclusion : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

c) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$: On a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

Donc : $f\left(n\times\frac{1}{n}\right)=f(n)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)=1$

Donc : $f(n)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=1$

Donc : $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n}$ car $f(n)=n$

d) Montrons que : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Soit : $r\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists(m;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que : $r=\frac{m}{n}$

$f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\times\frac{1}{n}\right)=f(m)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=m\times\frac{1}{n}=r$

Conclusion : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Exercice6 : (2pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts})$ Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\frac{x}{1+|x|}\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) f est-elle surjective ?

Solution : Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right|=\left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|\Rightarrow\frac{|x_1|}{1+|x_1|}=\frac{|x_2|}{1+|x_2|}\Rightarrow|x_1|(1+|x_2|)=|x_2|(1+|x_1|)$

$\Rightarrow|x_1||x_2|+|x_1|=|x_1||x_2|+|x_2|\Rightarrow|x_1|=|x_2|$

On remplace dans : $\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_1|}\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

2) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: on a : $x\le|x|\prec|x|+1$

Donc : $\frac{x}{1+|x|}\prec\frac{1+|x|}{1+|x|}$ c'est-à-dire : $f(x)\prec1$: Par exemple 1 ou 2 n'admet pas d'antécédents

Donc f n'est pas surjective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien