http://www.xriadiat.com **DS1: G** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $\left(1+1+1\text{pts}\right)$

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes. (Justifier les réponses avec un raisonnement logique)

1) $P:\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)x\le y\Rightarrow x^2\le y^2$

2) $Q:\ \left(\forall x\in[1.+\infty[\right);\left(\forall y\in[1.+\infty[\right)x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

3) $R:\ \left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

Solution : 1) $\overline{P\Rightarrow Q}\Leftrightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}\Leftrightarrow P\wedge\overline{Q}$

$\overline{P}:\ \left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right)x\le y\ et\ x^2\succ y^2$

$\left(\exists x=-2\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y=-1\in\mathbb{R}\right)-2\le-1\ et\ \left(-2\right)^2\succ\left(-1\right)^2$

On a : $\overline{P}$ est vraie car par suite : P est une proposition fausse.

2) $Q:\ \left(\forall x\in[1.+\infty[\right);\left(\forall y\in[1.+\infty[\right):x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

Soit : $(x;y)\in\left([1.+\infty[\right)^2$

Montrons : $x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

Supposons : $x\times y=1$ et Montrons : $x=1$ et $y=1$

Par l'absurde Supposons : $x\neq 1$ ou $y\neq 1$

puisque $(x;y)\in\left([1.+\infty[\right)^2$ alors : $x\succ 1$ ou $y\succ 1$ et donc : $xy\succ 1$ absurde

Donc : $x=y=1$

Donc : $Q:\left(\forall x\in[1.+\infty[\right);\left(\forall y\in[1.+\infty[\right):x\times y=1\Rightarrow x=y=1$ est vraie

$\overline{Q}:\ \left(\exists x\in[1.+\infty[\right);\left(\exists y\in[1.+\infty[\right):x\times y=1\ et\left(\ x\neq 1\ ou\ y\neq 1\right)$

3) $R:\ \left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}\ge 0$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow x+1\ge 1\Rightarrow\sqrt{x+1}\ge\sqrt{1}\Rightarrow\sqrt{x+1}\ge 1$

$\sqrt{x}\ge 0$ et $\sqrt{x+1}\ge 1\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1+0\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

Donc : R est vraie

Exercice2 : (2pts) : $\left(0{,}5\text{pts}+2\text{pts}\right)$

Soit $n\in\mathbb{N}$ considérons : $q\left(n\right)=9n^2+13n+5$

1)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:\left(3n+2\right)^2<q\left(n\right)<\left(3n+3\right)^2$

2)En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{q\left(n\right)}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) $q\left(n\right)=9n^2+13n+5=\left(3n\right)^2+2\times 3n\times 2+2^2+n+1=\left(3n+2\right)^2+n+1>\left(3n+2\right)^2$

$q(n)=9n^2+13n+5 \prec 9n^2+18n+9$ en effet : $(9n^2+18n+9)-(9n^2+13n+5)=5n+4\succ 0$:$\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $q(n)\prec(3n)^2+2\times 3n\times 3+3^2$ c'est-à-dire : $q(n)<(3n+3)^2$ et comme : $(3n+2)^2<q(n)$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}: (3n+2)^2<q(n)<(3n+3)^2$

2) Déduisons que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{q(n)}\notin\mathbb{N}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}: (3n+2)^2<q(n)<(3n+3)^2$ donc : $\sqrt{(3n+2)^2}<\sqrt{q(n)}<\sqrt{(3n+3)^2}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $|3n+2|<\sqrt{q(n)}<|3n+3|$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $3n+2<\sqrt{q(n)}<3n+3$ car $3n+2\in\mathbb{N}$ et $3n+3\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{q(n)}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs :

$3n+2 \;\; et \;\; 3n+3$ Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{q(n)}\notin\mathbb{N}$

Exercice3 : (2,5pts) : Montrer que : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\succ\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a\succ b$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a\le b\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$??

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$

On a : $a\le b \Rightarrow a\le b \;\; et \;\; a+1\le b+1$

$\Rightarrow\sqrt{a}\le\sqrt{b} \;\; et \;\; \sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1} \Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

Donc : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$; $a\le b\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

Donc par contraposition on déduit que : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\succ\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a\succ b$

Exercice4 : (3,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+2\text{pts}+1\text{pts})$

Soit f la fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par : $f(0)=3$ et $f(n+1)=2f(n)+5$

1)a) Calculer : $f(1)$; $f(2)$

b) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$ et déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)-f(n)\succ 0$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$ / $f(n)=2^{n+3}-5$

Solution : 1) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)=2f(n)+5$

Pour : $n=0$: $f(0+1)=2f(0)+5\Rightarrow f(1)=2f(0)+5\Rightarrow f(1)=2\times 3+5=11$

Pour : $n=1$: $f(1+1)=2f(1)+5\Rightarrow f(2)=2f(1)+5\Rightarrow f(2)=2\times 11+5=27$

b) Montrons que : $P(n)$" $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$"

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $f(0)=3\succ 0$

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n)\succ 0$"

Montrons que : $f(n+1)\succ 0$"??

On a : $f(n+1)=2f(n)+5$ et puisque $f(n)\succ 0$

Alors : $2f(n)\succ 0\Rightarrow 2f(n)+5\succ 5\succ 0$ c'est-à-dire : $f(n+1)\succ 0$"

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) \succ 0$

Soit : $n \in \mathbb{N}$ on a : $f(n+1) = 2f(n) + 5$

Donc : $f(n+1) - f(n) = 2f(n) + 5 - f(n) = f(n) + 5 \succ 0$ car $f(n) \succ 0$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n+1) - f(n) \succ 0$

2) Montrons par récurrence que : $P(n)$ " $\forall n \in \mathbb{N}$ / $f(n) = 2^{n+3} - 5$ "

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $f(0) = 3$ et $2^{0+3} - 5 = 8 - 5 = 3$

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n) = 2^{n+3} - 5$ "

Montrons que : $f(n) = 2^{n+4} - 5$ "??

On a : $f(n+1) = 2f(n) + 5$ et $f(n) = 2^{n+3} - 5$

Alors : $f(n+1) = 2\left(2^{n+3} - 5\right) + 5 = 2^{n+4} - 10 + 5 = 2^{n+4} - 5$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) = 2^{n+3} - 5$ "

Exercice5 : (2pts) : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases} B - A = C - A \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Rightarrow B = C$

Solution : On suppose que : $B - A = C - A$ et $A \cap B = A \cap C$

$\subset$) Montrons que $B \subset C$?

Soit $x \in B$

Si $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \cap C$ car : $A \cap B = A \cap C$

C'est-à-dire : $x \in C$

Si $x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow x \in C - A$ C'est-à-dire : $x \in C$

Dans tous les cas, on conclut que : $B \subset C$

$\supset$) Montrons que $C \subset B$?

La même démarche car B et C jouent des rôles symétriques.

On a donc : $B \subset C$ et $C \subset B$

Conclusion : $B = C$

Exercice6 : (2,5pts) : Soit l'application : $\begin{array}{l} f :]1;+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \sqrt{x^2 - x} \end{array}$

Montrer que f est injective

Solution : Soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_1} = x_2 + \sqrt{x_2^2 - x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1^2 - x_1} - \sqrt{x_2^2 - x_2} = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1^2 - x_1} - \sqrt{x_2^2 - x_2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 \Rightarrow x_1^2 - x_1 - 2\sqrt{x_2^2 - x_2}\sqrt{x_1^2 - x_1} + x_2^2 - x_2 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow -x_1 - x_2 - 2\sqrt{x_2^2 - x_2}\sqrt{x_1^2 - x_1} + 2x_1x_2 = 0$$

$$\Rightarrow -x_1 + x_1x_2 - 2\sqrt{x_2^2 - x_2}\sqrt{x_1^2 - x_1} - x_2 + x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1(x_2 - 1) - 2\sqrt{x_1(x_1 - 1)}\sqrt{x_2(x_2 - 1)} + x_2(x_1 - 1) = 0$$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x_1(x_2-1)}\right)^2-2\sqrt{x_1(x_1-1)}\sqrt{x_2(x_2-1)}+\left(\sqrt{x_2(x_1-1)}\right)^2=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x_1(x_2-1)}-\sqrt{x_2(x_1-1)}\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x_1(x_2-1)}-\sqrt{x_2(x_1-1)}=0$

$\Rightarrow\sqrt{x_1(x_2-1)}=\sqrt{x_2(x_1-1)}\Rightarrow x_1(x_2-1)=x_2(x_1-1)$

$\Rightarrow x_1x_2-x_1=x_1x_2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\quad\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$ ou $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0$

$\Rightarrow x_1=x_2$ Ceci signifie que l'application f est injective.

Exercice7 : (4,5pts) : $(2\text{pts}+2\text{pts}+0{,}5\text{pts})$ Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

b) f est-elle injective ? justifier

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)\le\frac{1}{4}$

b) f est-elle surjective ? justifier

3) f est-elle bijective ?

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2}=\frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(1-x)^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2=\frac{x(1-x)^2}{(x^2+1)^2}=f(x)$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

b) Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

Si je prends : $x=2$

On a : $f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2\neq\frac{1}{2}$

Donc : f n'est pas injective

2) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)\le\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}-f(x)=\frac{1}{4}-\frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2-4x(1-x)^2}{4(1+x^2)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-4x(x^2-2x+1)}{4(1+x^2)^2}=\frac{x^4-4x^3+8x^2-4x+2x^2+1}{4(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{x^4-4x^3+10x^2-4x+1}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-4x+10-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2^2+4\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2+4\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}\geq 0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)\leq\frac{1}{4}$

b) Par exemple. 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

3) f n'est pas bijective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien