http://www.xriadiat.com **DS1: F** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) : Ecrire la négation et donner les valeurs de vérités des propositions suivantes :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

Solution :1) $P:(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R}):x\neq 2\ et\ \ x^2=4$

$\overline{P}:$ est une proposition vraie car : $(\exists x=-2\in\mathbb{R}):-2\neq 2\ et\ \ (-2)^2=4$

Par suite : $P:(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$ est fausse

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

Q : est une proposition vraie car : $(\exists x=-1000\in\mathbb{R}):-1000<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

$\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}):x<2\ et\ x^2\prec 2019$ est fausse

Exercice2 : (2,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts})$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est un multiple de 11

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$2^{10\times1-7}+3^{5\times1-2}-2=2^3+3^3-2^1=8+27-2=33=3\times11$

Donc P (1) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,2^{10n-7}+3^{5n-2}-2=11k$ donc : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,2^{10n-7}=11k-3^{5n-2}+2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,2^{10n+10-7}+3^{5n+5-2}-2=11k'$??

$2^{10n+10-7}+3^{5n+5-2}-2=2^{10n-7}\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5=(11k-3^{5n-2}+2)\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5-2$

$=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times2^{10}+2\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5-2\ =11k\times2^{10}+3^{5n-2}(3^5-2^{10})+2\times2^{10}-2$

$=11k\times2^{10}+3^{5n-2}(243-1024)+2\times1024-2\ =11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times781+2046$

$=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times11\times71+186\times11=11(k\times2^{10}-3^{5n-2}\times71+186)=11k'$ avec $k'=k\times2^{10}-3^{5n-2}\times71+186\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est un multiple de 11

Exercice3 : (2,5pts) : Montrer par disjonction des cas que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{n^{2024}+1+(n+1)^{2025}}{2}\in\mathbb{N}$

Solution : il suffit de montrer que : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est un entier pair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de x, il est parfois utile de faire une disjonction de cas : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre x.

On peut, par exemple, séparer les cas où x est un entier pair des cas où x est impair, ou encore séparer les cas où x est un réel positif des cas où il est strictement négatif.

Premier cas : si n est pair : alors n^{2024} est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Alors : $n^{2024}+1$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

D'autre part : $n+1$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

Alors : $(n+1)^{2025}$ est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Donc : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est pair (comme somme de nombres impairs)

2 iem cas : si n est impair : alors n^{2024} est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Alors : $n^{2024}+1$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)

D'autre part : $n+1$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)

Alors : $(n+1)^{2025}$ est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Donc : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est pair (comme somme de nombres pairs)

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^{2024}+1+(n+1)^{2025}}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice4 : (6pts) : $(1{,}5pts+1{,}5pts+1{,}5pts+1{,}5pts)$

1) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a \in \mathbb{Q} \ et \ b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \notin \mathbb{Q}$

2) Déterminera la négation de la proposions $P:(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a \notin \mathbb{Q} \ et \ b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \notin \mathbb{Q}$ et étudier la valeur de vérité de la proposition : P

3) Soit : $k \in \{3;5;7;11;13;15\}$; Supposons que : $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$

a) Montrer qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: tel que : $a \wedge b = 1$ et $\frac{k-1}{8} = \frac{a^2-1}{8} - \frac{b^2-1}{8}k$

b) Montrer que : $\frac{a^2-1}{8} \in \mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8} \in \mathbb{N}$

c)Trouver une contradiction et conclure

4) Montrer que : $P:(\forall a \in \mathbb{Q}^+)(\forall b \in \mathbb{Q}^+) : \sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \ et \ \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

Solution : ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

1) Montrons que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a \in \mathbb{Q} \ et \ b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \notin \mathbb{Q}$

Soient : $(a \in \mathbb{R}) \ et \ (b \in \mathbb{R})$: Supposons que : $a \in \mathbb{Q} \ et \ b \notin \mathbb{Q}$ et montrons que $a+b \notin \mathbb{Q}$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $a+b \in \mathbb{Q}$

Donc : $a+b \in \mathbb{Q}$ et $-a \in \mathbb{Q}$

Alors : $a+b-a \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire : $b \in \mathbb{Q}$; Nous obtenons donc une contradiction car $b \notin \mathbb{Q}$

Par suite : $a+b \notin \mathbb{Q}$

2) $P:(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a \notin \mathbb{Q} \ et \ b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \notin \mathbb{Q}$

$\overline{P}:(\exists a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) : a \notin \mathbb{Q} \ et \ b \notin \mathbb{Q} \ \ et \ \ a+b \in \mathbb{Q}$

$(\exists a = \sqrt{2} \in \mathbb{R})(\exists b = 1-\sqrt{2} \in \mathbb{R}) : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \ et -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \ \ et \ \ \sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$

Donc ; La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

3) Soit : $k \in \{3;5;7;11;13;15\}$; Supposons que : $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$

a) Montrons qu'il existe : $(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que : $a\wedge b=1$ et $\frac{k-1}{8}=\frac{a^2-1}{8}-\frac{b^2-1}{8}k$

$\sqrt{k}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/\sqrt{k}=\frac{a}{b}$ avec : $a\wedge b=1$

$\Rightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/k=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow kb^2=a^2\Rightarrow 0=a^2-kb^2\Rightarrow k-1=a^2-kb^2+k-1$

$\Rightarrow k-1=a^2-1-(b^2-1)k\Rightarrow\frac{k-1}{8}=\frac{a^2-1}{8}-\frac{b^2-1}{8}k$

b) Pour montrer que : $\frac{a^2-1}{8}\in\mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8}\in\mathbb{N}$: Il suffit de montrer que : b est impair

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que b est pair

Donc : b^2 est pair $\Rightarrow kb^2$ est pair$\Rightarrow$ a^2 est pair (car :)$\Rightarrow$ a est pair

Nous obtenons donc une contradiction car : $a\wedge b=1$

Par suite : b est impair$\Rightarrow$ b^2 est impair et $kb^2=a^2$ et $k\in\{3;5;7;11;13;15\}$ est impair

$\Rightarrow$ a^2 est impair$\Rightarrow$ a est impair

a est impair et b est impair$\Rightarrow\exists(k;k'')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/a=2k+1$ et $b=2k'+1$

Donc : $a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$ et $b^2=(2k'+1)^2=4k'^2+4k'+1$

Donc : $a^2-1=4k(k+1)$ et $a^2-1=4k'(k'+1)$

Donc : $\frac{a^2-1}{8}=\frac{4k(k+1)}{8}=\frac{k(k+1)}{2}$ et $\frac{b^2-1}{8}=\frac{4k'(k'+1)}{8}=\frac{k'(k'+1)}{2}$ or : $k(k+1)=2n$ (le produit de deux nombres consécutifs) . D'où : $\frac{a^2-1}{8}\in\mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8}\in\mathbb{N}$

c)Trouvons une contradiction et concluons :

On a : $\frac{a^2-1}{8}\in\mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8}\in\mathbb{N}$ donc : $\frac{a^2-1}{8}\in\mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8}k\in\mathbb{N}$

Donc : $\frac{k-1}{8}=\frac{a^2-1}{8}-\frac{b^2-1}{8}k\in\mathbb{Z}$ et comme : $\frac{k-1}{8}\geq 0$ car $k\in\{3;5;7;11;13;15\}\geq 1$

Donc : $\frac{k-1}{8}\in\mathbb{N}$ <u>absurde</u> car : $k-1\in\{2;4;6;10;12;14\}\Rightarrow\frac{k-1}{8}\in\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$ Donc : $\frac{k-1}{8}\notin\mathbb{N}$

<u>Conclusion</u> **:** $\forall k\in\{3;5;7;11;13;15\}$; $\sqrt{k}\in\mathbb{Q}$

4) Montrons que : $P:(\forall a\in\mathbb{Q}^+)(\forall b\in\mathbb{Q}^+):\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$

Soient : $(a\in\mathbb{Q}^+)$ et $(b\in\mathbb{Q}^+)$: Supposons que : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}^+$

Si $a\neq b$ alors : $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}^+$

Alors : $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}^+$ donc : $\frac{1}{a-b}\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}$ car $\frac{1}{a-b}\in\mathbb{Q}$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ $\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow 2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{1}{2}2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ alors : $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$

Donc : $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$

Si $a \neq b$ alors : $2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{1}{2}2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

Exercice5 : (2pts) :

Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

Monter que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Leftrightarrow A \subset B$

Solution : $\Rightarrow$) On suppose que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

Montrons que $A \subset B$???

Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A \subset B$, on montre que : $x \in A \Rightarrow x \in B$

Soit : $x \in A \Rightarrow x \in A - C$ ou $x \in A \cap C$

Car : $A = (A - C) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in B - C$ ou $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in B$ ou $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

Donc : $A \subset B$

Par suite : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Rightarrow A \subset B$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A \subset B$ **et** Montrons que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$???

a) Montrons que : $A \cap C \subset B \cap C$

Soit : $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in C$

$\Rightarrow x \in B \text{ et } x \in C$

$\Rightarrow x \in B \cap C$

Donc : $A \cap C \subset B \cap C$

b) Montrons que : $A - C \subset B - C$

Soit : $x \in A - C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \notin C \Rightarrow x \in B \text{ et } x \notin C$

$\Rightarrow x \in B - C$

Donc : $A - C \subset B - C$

En déduit donc que : $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

Conclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

Exercice6 : (5pts) : $(1\text{pts} + 1\text{pts} + 1\text{pts} + 2\text{pts})$

Soit l'application : $\begin{array}{l} f : [1;+\infty[\rightarrow [2;+\infty[\\ x \mapsto x + \frac{1}{x} \end{array}$

1) Calculer : $f(1)$ et $f(2)$

2) Montrer que f est injective

3) Montrer que f est surjective

4) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Solution : 1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f(1)=1+\frac{1}{1}=2$ et $f(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2) Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\frac{1}{x_1}=x_2+\frac{1}{x_2}$

$\Rightarrow \frac{x_1^2+1}{x_1}=\frac{x_2^2+1}{x_2}\Rightarrow x_2(x_1^2+1)=x_1(x_2^2+1)$

$\Rightarrow x_2x_1^2+x_2=x_1x_2^2+x_1\Rightarrow x_2x_1^2-x_1x_2^2+x_2-x_1=0$

$\Rightarrow x_2x_1(x_1-x_2)-(x_1-x_2)=0\Rightarrow(x_1-x_2)(x_2x_1-1)=0$

$\Rightarrow x_1-x_2=0 \text{ ou } x_2x_1-1=0\Rightarrow x_1=x_2 \text{ ou } x_2x_1=1\Rightarrow x_1=x_2 \text{ ou } x_1=\frac{1}{x_2}$

$si:\ x_1=\frac{1}{x_2}$ Comme : $x_2\in[1;+\infty[\ \Rightarrow\ x_1=\frac{1}{x_2}\leq 1$

Et puisque : $x_1\geq 1$ Alors : $x_1=1$

Et par suite $x_2=1$ et donc : $x_1=x_2$

Dans tous les cas : $x_1=x_2$

Donc f est injective

3) Montrons que f est surjective

Soit $y\in[2;+\infty[$

Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$f(x)=y\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=y\Leftrightarrow x^2-xy+1=0$

$\Delta=y^2-4\geq 0$ car $y\geq 2$

Donc : au moins 2 solutions : $x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

Puisque l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ ($\forall y\in\mathbb{R}$)

C'est-à-dire : $\forall y\in[2;+\infty[;\ \exists x\in\mathbb{R}/f(x)=y$

Conclusion : f est surjective

4) Puisque f est injective et surjective alors f est bijective

Soit $y\in[2;+\infty[$; $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-xy+1=0$

$x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $x_2=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

On a : $x_2-1=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}-1=\frac{y-2-\sqrt{y^2-4}}{2}=\frac{y-2-\sqrt{(y-2)(y+2)}}{2}$

Comme : $y-2\leq y+2\qquad \otimes y-2$

Alors : $(y-2)(y-2)\leq(y+2)(y-2)$

Alors : $(y-2)^2 \leq (y+2)(y-2)$

Alors : $\sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $|y-2| \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $y-2 \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$ car $y \in [2;+\infty[$

Et donc : $x_2 - 1 \leq 0$ donc : $x_2 = \dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \notin y \in [1;+\infty[$

Alors : $x = \dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$

Donc : $$\begin{array}{l} f^{-1} : [2;+\infty[\to [1;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \end{array}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien