http://www.xriadiat.com **DS1: E** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (2,5pts) : $(1,5\text{pts}+0,5\text{pts}+0,5\text{pts})$

On considère les assertions suivantes P :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):1+x\geq 2\sqrt{x}\ \ et\ \ \frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$"

Q :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):x+\frac{1}{x}\succ 2\ \ ou\ \ x^2+x\prec 1$"

1) Montrer que P est une assertion vraie

2) Déterminer : $\overline{P}$

3) Montrer que Q est une assertion fausse

Solution :1) Montrons que P :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):1+x\geq 2\sqrt{x}\ \ et\ \ \frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$"

a) Soit : $x\in\left]0;+\infty\right[$; Montrons que : $1+x\geq 2\sqrt{x}$

$1+x-2\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\times 1+1^2=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$

Donc : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):1+x\geq 2\sqrt{x}$ est vraie

b) Montrons que "$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$"

Soit : $x\in\left]0;+\infty\right[$; Montrons que : $\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}=\frac{x^2-2x+1^2}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}\geq 0$ est vraie "$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$" est vraie

Par suite : P est une assertion vraie

2)Déterminons : $\overline{P}$

$\overline{P}$:"$\left(\exists x\in\left]0;+\infty\right[\right):1+x\prec 2\sqrt{x}\ \ ou\ \ \frac{x}{1+x^2}\succ\frac{1}{2}$"

3) Q :"$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):x+\frac{1}{x}\succ 2\ \ ou\ \ x^2+x\prec 1$"

$\overline{Q}$:"$\left(\exists x\in\left]0;+\infty\right[\right):x+\frac{1}{x}\leq 2\ \ et\ \ x^2+x\geq 1$"est vraie car :$\left(\exists 1\in\left]0;+\infty\right[\right):1+\frac{1}{1}\leq 2$ et $1^2+1=2\geq 1$

Par suite : Q est une assertion fausse

Exercice2 : (1,5pts) : Montrer que : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$: $\left(b>a\Rightarrow b^2-a^2\geq 3\right)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par implications :

Soit : $(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$; Supposons que : $b>a$ et Montrons que : $b^2-a^2\geq 3$

On a : $b>a\Rightarrow b\geq a+1\Rightarrow b^2\geq(a+1)^2\Rightarrow b^2\geq a^2+2a+1\Rightarrow b^2-a^2\geq 2a+1$

Or : $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \geq 1 \Rightarrow 2a \geq 2 \Rightarrow 2a+1 \geq 3$

Alors : $b^2 - a^2 \geq 2a+1 \geq 3$ c'est-à-dire : $b^2 - a^2 \geq 3$

Conclusion : $\forall (a;b) \in \mathbb{N}^{*2}$: $(b > a \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 3)$

Exercice3 : (3,5pts) : $(0{,}5\text{pts} + 1{,}5\text{pts} + 1{,}5\text{pts})$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(4n+1)^2 \prec 16n^2 + 8n + 3 \prec (4n+2)^2$

2) a) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

Solution :1) Comme : $16n^2+8n+3 = \left((4n)^2 + 2\times 4n + 1\right) + 2 = (4n+1)^2 + 2$

et comme : $(4n+1)^2 \prec (4n+1)^2 + 2$

Alors : $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3$

Calculons $(4n+2)^2$: $(4n+2)^2 = (4n)^2 + 2\times 4\times 2n + 4 = 16n^2+16n+4$

Comparons : $(4n+2)^2$ et $16n^2+8n+3$:

$(4n+2)^2 - (16n^2+8n+3) = 16n^2+16n+4-16n^2-8n-3 = 8n+1 \succ 0$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$: $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3 \prec (4n+2)^2$

2) a) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3 \prec (4n+2)^2$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ $4n+1 \prec \sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n+2$ et comme : $4n+2 = (4n+1)+1$

Donc : $\sqrt{16n^2+8n+3}$ est compris strictement entre deux entiers consécutifs : $4n+1$ et $4n+2$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $4n+1 \prec \sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n+2$

Donc : $4n^2+4n+1 \prec 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n^2+4n+2$

Donc : $(2n+1)^2 \prec 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n^2+4n+2 \prec 4n^2+8n+4$

Donc : $(2n+1)^2 \prec 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} \prec (2n+2)^2$

Donc : $2n+1 \prec \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}} \prec 2n+2$

Donc : $n^2+2n+1 \prec n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}} \prec n^2+2n+2$

Donc : $(n+1)^2 \prec n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}} \prec n^2+2n+2 \prec n^2+4n+4 : (n+2)^2$

Donc : $n+1 \prec \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}}} \prec n+2$

Donc : ce nombre est compris strictement entre deux entiers consécutifs : $n+1$ et $n+2 = (n+1)+1$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

Exercice4 : (1,5pts) : Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; (x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0)$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

$\forall x \in \mathbb{R}; (x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0)$

Soit : $x\in\mathbb{R}$; Par contraposée Montrons que : $\left(x^3+2x^2+x+2=0 \Rightarrow x=-2 \right)$

Supposons que : $x^3+2x^2+x+2=0$ Alors : $x^2(x+2)+(x+2)=0$

Alors : $(x+2)(x^2+1)=0$

Alors : $x+2=0$ ou $x^2+1=0$

Alors : $x=-2$ ou $x^2=-1$ (impossible)

Alors : $x=-2$

Donc : $\left(x^3+2x^2+x+2=0 \Rightarrow x=-2 \right)$

Par contraposée on a donc : $\forall x\in\mathbb{R};\left(x\neq -2 \Rightarrow x^3+2x^2+x+2\neq 0\right)$

Exercice5 : (1,5pts) : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$ et $y=z$ et $z=x$

C'est-à-dire supposant que : $x=y=z$

Comme on a : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$ et $x=y=z$

Alors : $x(x+x)+x(x+x)+x(x+x)=12$

Donc : $2x^2+2x^2+2x^2=18 \Rightarrow 6x^2=12 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice6 : (2,5pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts})$ 1) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2$$

1) Calculer : S_1 ; S_2 et S_3

2) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

Solution : 1) $S_1=1^2=\sum_{k=0}^{k=0}(2k+1)^2=1$ et $S_2=1^2+3^2=\sum_{k=0}^{k=1}(2k+1)^2=1+9=10$

$$S_3=1^2+3^2+5^2=\sum_{k=0}^{k=2}(2k+1)^2=1+9+25=35$$

2)Notons P(n) la proposition : "$S_n=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $S_1=1$ et $\dfrac{1(4\times 1^2-1)}{3}=\dfrac{3}{3}=1$ donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^2=\dfrac{(n+1)\left(4(n+1)^2-1\right)}{3}=\dfrac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}$??

C'est-à-dire montrons que : $S_{n+1}=\frac{4n^3+8n^2+3n+4n^2+8n+3}{3}=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2+(2n+1)^2$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{4n^3-n+3(2n+1)^2}{3}=\frac{4n^3-n+3(4n^2+4n+1)}{3}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{4n^3-n+12n^2+12n+3}{3}=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

Exercice7 : (3pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{6n-2}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{3n+1}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{1}{12}\in B$ et $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrer que : $A\subset B$

3) Est-ce qu'on a : $A=B$?

Solution :1) a) Montrons que : $\frac{1}{12}\in B$

$\frac{1}{12}\in B\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{3n+1}{12}\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/3n+1=1$

$\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/3n=0\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=0\in\mathbb{Z}}$

Il suffit de prendre : $n=0$

On peut vérifier que : $\frac{3n+1}{12}=\frac{3\times0+1}{12}=\frac{1}{12}$

Par suite : $\frac{1}{12}\in B$

b) Montrons que : $\frac{1}{12}\notin A$

Supposons par l'absurde que : $\frac{1}{12}\in A$

$\frac{1}{12}\in B\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{6n-2}{12}$

$\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/6n-2=1\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/6n=3\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}}$

Contradiction : Donc : $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrons que : $A\subset B$

Soit : $r\in A$ Montrons que : $r\in B$?

$r\in A\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/r=\frac{6n-2}{12}$

Pour montrer que : $r \in B$ Il suffit de trouver un : $n' \in \mathbb{Z}$ tel que : $r = \frac{3n'+1}{12}$

1ier méthode : $r = \frac{3n'+1}{12}$ et $r = \frac{6n-2}{12}$

Donc : $\frac{3n'+1}{12} = \frac{6n-2}{12}$

Donc : $3n'+1 = 6n-2 \Leftrightarrow 3n' = 6n-3 \Leftrightarrow n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$

Donc : Il suffit de prendre : $n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$

Par suite : $r \in B$

Conclusion : $A \subset B$

2ier méthode : Pour montrer que : $r \in B$ Il suffit de trouver un : $n' \in \mathbb{Z}$ tel que : $r = \frac{3n'+1}{12}$

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / r = \frac{6n-2}{12}$

$r = \frac{6n-2}{12} = \frac{3\times 2n-2}{12} = \frac{3\times 2n-3+3-2}{12} = \frac{3\times(2n-1)+1}{12} = \frac{3\times n'+1}{12}$

Avec : $n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$ car $n \in \mathbb{Z}$

Donc : $\exists n' \in \mathbb{Z} / r = \frac{3n'+1}{12}$; Par suite : $r \in B$

Conclusion : $A \subset B$

3) Comme : $\frac{1}{12} \in B$ et $\frac{1}{12} \notin A$ alors : $B \not\subset A$

Par suite : $A \neq B$

Exercice8 : (4pts) : $(0{,}5\text{pts} + 1\text{pts} + 0{,}5\text{pts} + 1\text{pts} + 1\text{pts})$

Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + x + 2 \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-1-x) = f(x)$

2) f est-elle injective ?

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{4}$

4) f est-elle surjective ?

5) Montrer que : $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$

Solution : 1) Montrons que : $f(-1-x) = f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-1-x) = (-1-x)^2 + (-1-x) + 2$

$= (1+x)^2 + -1 - x + 2 = x^2 + 2x + 1 + -1 - x + 2$

$= x^2 + x + 2 = f(x)$

2)Si je trouve : $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-1-x) = f(x)$

Si je prends : $x = 0$

On a : $f(-1) = f(0)$ mais $0 \neq -1$

Donc : f n'est pas injective

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 1$

$f(x)=1 \Leftrightarrow x^2+x+2=1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3\prec 0$ Donc : $S=\varnothing$

4)Par exemple : 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

5) Montrons que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

On raisonne par double inclusion :

a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ Montrons que : $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$ c'est-à-dire Montrons que : $\frac{7}{4}\leq f(x)$

$f(x)-\frac{7}{4}=x^2+x+2-\frac{7}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$ $\Delta=1^2-4\times\frac{1}{4}\times1=0$ Donc : $x^2+x+\frac{1}{4}\geq 0$

Donc : $f(x)-\frac{7}{4}\geq 0$ C'est-à-dire $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$ Alors : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

a) Inversement montrons que : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$: Montrons que : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2+x+2=y \Leftrightarrow x^2+x+2-y=0$: $\Delta=1^2-4\times(2-y)=-7+4y$

Comme : $\frac{7}{4}\leq y$ alors : $-7+4y\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions : $x=\frac{-1+\sqrt{-7+4y}}{2}\in\mathbb{R}$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{-7+4y}}{2}\in\mathbb{R}$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Donc : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Conclusion : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$