

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir surveiller n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS : Durée :2 heures

(La correction voir 😊 <http://www.xriadiat.com> )

**Exercice1** : (2,5pts) : ( 1,5pts + 0,5pts + 0,5pts)

On considère les assertions suivantes  $P : "( \forall x \in ]0; +\infty[ ) : 1+x \geq 2\sqrt{x}$  et  $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}"$

$Q : "( \forall x \in ]0; +\infty[ ) : x + \frac{1}{x} > 2$  ou  $x^2 + x < 1"$

1) Montrer que  $P$  est une assertion vraie et Déterminer :  $\overline{P}$

2) Montrer que  $Q$  est une assertion fausse

**Exercice2** : (1,5pts) : Montrer que :  $\forall (a; b) \in \mathbb{N}^{*2} : (b > a \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 3)$

**Exercice3** : (3,5pts) : ( 0,5pts + 1,5pts + 1,5pts)

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; (4n+1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n+2)^2$

2) a) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \sqrt{16n^2 + 8n + 3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}} \notin \mathbb{N}$

**Exercice4** : (1,5pts) : Démontre que :  $\forall x \in \mathbb{R}; (x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0)$

**Exercice5** : (1,5pts) : Soient  $(x; y; z) \in \mathbb{Q}^3$  tels que :  $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$

Montrer que :  $x \neq y$  ou  $y \neq z$  ou  $z \neq x$

**Exercice6** : (2,5pts) : ( 1pts + 1,5pts) 1) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1} (2k+1)^2$$

1) Calculer :  $S_1 ; S_2$  et  $S_3$  2) Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} (2k+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

**Exercice7** : (3pts) : ( 1pts + 1pts + 1pts)

Soient les ensembles suivants :  $A = \left\{ \frac{6n-2}{12} / n \in \mathbb{Z} \right\}$  et  $B = \left\{ \frac{3n+1}{12} / n \in \mathbb{Z} \right\}$

1) Montrer que :  $\frac{1}{12} \in B$  et  $\frac{1}{12} \notin A$  2) Montrer que :  $A \subset B$  3) Est-ce qu'on a :  $A = B$  ?

**Exercice8** : (4pts) : ( 0,5pts + 1pts + 0,5pts + 1pts + 1pts) Soit l'application  $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + x + 2 \end{matrix}$

1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} f(-1-x) = f(x)$  2)  $f$  est-elle injective ?

3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = -\frac{1}{4}$  4)  $f$  est-elle surjective ?

5) Montrer que :  $f(\mathbb{R}) = \left[ \frac{7}{4}; +\infty \right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

