http://www.xriadiat.com **DS1: D** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (5pts) : $(1\text{pts}\times 3+2)$

On considère les propositions suivantes :

$P:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$ et $Q:(\forall n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\in\mathbb{N}$

$R:(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}):\left[\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow |a|\prec c\ et\ |b|\prec c\right]$

1) Déterminer la valeur de vérité de P

2) Ecrire la négation des propositions P et Q et R

3) Montrer que la proposition Q est fausse

4) Montrer que la proposition R est vraie

Solution :1) $P:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$

$xy+2y+x+2=0\Leftrightarrow y(x+2)+x+2=0\Leftrightarrow(x+2)(y+1)=0$

Si je prends : $y=-1$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$

La proposition P est vraie

2) $\overline{P}:(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2\neq 0$

$\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\notin\mathbb{N}$

$\overline{R}:(\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}):\left[\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\ et\left(|a|\geq c\ ou\ |b|\geq c\right)\right]$

3) Déterminons la valeur de vérité de Q

On a : $\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\notin\mathbb{N}$

Pour : $n=1:\sqrt{1(1+1)+1}=\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$

Donc La proposition $\overline{Q}$: est vraie par suite Q est fausse

4) Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$: Supposons que : $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$

On a : $\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|a|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ et comme : $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$

Alors : $|a|\prec c$

On a aussi : $\left|\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|b|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ car $|a-b|=|b-a|$ et comme :

$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$ alors $|b|\prec c$

Conclusion : $(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3):\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow |a|\prec c\ et\ |b|\prec c$

Exercice2 : (2pts) : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$

$x\neq y \text{ et } x+y\neq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=1$??

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On a : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1} \Rightarrow x^2-x+1=y^2-y+1$

$\Rightarrow x^2-y^2-(x-y)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y)-(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Rightarrow x-y=0 \text{ ou } x+y-1=0$

$\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=1$

Donc : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=1$

Donc par contraposition on déduit que : $x\neq y\Rightarrow (x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exercice3 : (2pts) : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$ et $y=z$ et $z=x$

C'est-à-dire supposant que : $x=y=z$

Comme on a : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$ et $x=y=z$

Alors : $x(x+x)+x(x+x)+x(x+x)=18$

Donc : $2x^2+2x^2+2x^2=18\Rightarrow 6x^2=18\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice4 : (2,5pts) : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}.$$

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{1-1}1^2=1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1}=1\times(-1)^2=1$$

Donc P(1) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$??

Remarque : $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n\times 1=(-1)^n$ et

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2+(-1)^n(n+1)^2=S_n+(-1)^n(n+1)^2$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1} + (-1)^n (n+1)^2 = \frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^n + 2(-1)^n (n+1)^2\right)$

Car : $(-1)^{n+1} = (-1)^n \times (-1)^1 = -(-1)^n$

Donc : $S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(-1)^n\left(-n+2(n+1)\right) = \frac{1}{2}(-1)^n (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice5 : $(2{,}5\text{pts})$: Soient les ensembles : $A = \left\{\frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad B = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Monter que : $A \cap B = \varnothing$

Solution : On suppose que : $A \cap B \neq \varnothing$

Donc : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ et $x_0 \in B$

$\Leftrightarrow \exists (k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2 :$ $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc $\Leftrightarrow \exists (k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc : $\frac{2}{5}(k_1 - k_2) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k_1 - k_2 = -\frac{5}{8}$ contradiction avec la faite que $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8} \notin \mathbb{Z}$ Donc : $A \cap B = \varnothing$

Exercice6 : (6pts) : $(2\text{pts} + 1\text{pts} + 1{,}5\text{pts} + 1{,}5\text{pts})$

Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R}) \subset \left]-1,1\right[$:

b) f est-elle surjective ?

c) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}(\{3\})$

2) Montrer que : $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

3) Montrer que f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$ et Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$: on a : $|f(x)| = \left|\frac{x}{1+|x|}\right| = \frac{|x|}{|1+|x||} = \frac{|x|}{1+|x|}$ car $1+|x| \succ 0$

On a : $|x| \prec |x|+1$ car $|x|+1-|x| = 1 \succ 0$

Donc : $\frac{|x|}{1+|x|} \prec \frac{1+|x|}{1+|x|}$ c'est-à-dire : $|f(x)| \prec 1$:

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

C'est-à-dire : $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Donc : par exemple 1 ou 2 n'admet pas d'antécédents
Donc f n'est pas surjective

c) Déterminons : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}\right\}$$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - |x| - 1 = 0$

Si : $x \geq 0$ $\quad 2x - |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Si : $x \prec 0$ $\quad 2x - |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ pas de solutions : car $x \prec 0$

Conclusion : $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ Par suite : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{1\}$

$f^{-1}(\{3\}) = \varnothing$ Car $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \prec 1$ et $3 \geq 1$

2) Montrons que : $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$$

$x \in f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{1+|x|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1+|x|}{2}$ car : $1+|x| \succ 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1+|x|}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1+x}{2}$ car $x \geq 0$ et donc : $|x| = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq \frac{1+x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ 2x \leq 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0,1]$$

Alors : $x \in f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow x \in [0,1]$ et par suite : $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

3) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow \left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right| = \left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right| \Rightarrow \frac{|x_1|}{1+|x_1|} = \frac{|x_2|}{1+|x_2|} \Rightarrow |x_1|(1+|x_2|) = |x_2|(1+|x_1|)$$

$$\Rightarrow |x_1||x_2| + |x_1| = |x_1||x_2| + |x_2| \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

On remplace dans : $\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_1|} \Rightarrow x_1=x_2$ Donc f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

- On a : f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est injective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Soit : $y\in]-1,1[$: Montrons que : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x}{|x|+1}=y$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :Si : $y=0$ alors $\frac{x}{|x|+1}=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc : $\exists! x=0\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=0$

Si : $y\in]0,1[$ alors $\frac{x}{|x|+1}=y \Rightarrow x \succ 0$

$\frac{x}{|x|+1}=y \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=y \Leftrightarrow x=(x+1)y \Leftrightarrow x-xy=y \Leftrightarrow x(1-y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$ car : $y=]0,1[$

Donc : Si : $y\in]0,1[$ alors $\exists! x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Si : $y\in]-1,0[$ alors $-1\prec y\prec 0$

Donc : $\frac{x}{|x|+1}=y \Rightarrow x\prec 0$

$\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow x=(1-x)y \Leftrightarrow x=y-xy \Leftrightarrow x+xy=y \Leftrightarrow x(1+y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}$ car : $-1\prec y\prec 0$

Donc : Si : $y\in]-1,0[$ $\exists! x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Conclusion : $\forall y\in]-1,1[$ $\exists! x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Par suite : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Résumé : Si : $y\in[0,1[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}=f^{-1}(y)$

Si : $y\in]-1,0[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}=f^{-1}(y)$

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $\begin{array}{l}]-1,1[\to\mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{y}{1-y} & si\ \ x\in[0,1[\\ \frac{y}{1+y} & si\ \ x\in]-1,0[\end{cases} \end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien