http://www.xriadiat.com **DS1: C** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1\text{pts}\times 3)$

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.
(Justifier vos réponses)

1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});2x^2+xy+5y^2\neq 0$ »

2) Q: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=2\Rightarrow x\succ 2$ »

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N}^*)/\sqrt{4n^2+5n}\notin\mathbb{N}$ »

Solution : 1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});3x^2-xy+4y^2\neq 0$ »

Pour : $x=1\in\mathbb{R}$: $2\times 1^2+1y+5y^2=5y^2+y+2$

$\Delta=1^2-40=-39\prec 0$ donc : $5y^2+y+2=0$ n'a pas solution c'est-à-dire : $5y^2+y+2\neq 0$

Alors P: est vraie

$\overline{P}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});2x^2+xy+5y^2=0$ »

2) Q : « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=1\Rightarrow x\succ 1$ » donc : $\overline{Q}$: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x-y=2\ et\ x\leq 2$ »

Pour : $x=1$ et $y=-1$ on a : $x-y=1-(-1)=2\ \ et\ \ 1\leq 2$

Alors la proposition $\overline{Q}$: est vraie et par suite : Q: Fausse

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N}^*)/\sqrt{4n^2+5n}\notin\mathbb{N}$ » donc : $\overline{R}$: « $(\exists n\in\mathbb{N}^*)/\sqrt{4n^2+5n}\in\mathbb{N}$ »

Pour : $n=1$: $\sqrt{4\times 1^2+5\times 1}=\sqrt{9}=3\in\mathbb{N}$

Alors la proposition $\overline{R}$: est vraie et par suite : R: Fausse

Exercice2 : (2pts) : $(0{,}5\text{pts}\times 4)$

On considère les assertions suivantes : P $:(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2):f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

1) Ecrire la négation de P

2) Soit f l'application de : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}):f(x)=x^2+2x+2$

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}):f(-x-2)=f(x)$

3) Est ce que : P est vraie ? justifier votre réponse

4) Que peut-on dire de l'application f ?

Solution :1) a) P $:(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2):f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U\ et\ non(V)$"

Alors : $\overline{P}:(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2)/f(x)=f(y)\ et\ x\neq y$

2) Montrons que : Soit : $x\in\mathbb{R}$; $f(-x-2)=(-x-2)^2+2(-x-2)+2$

$f(-x-2)=x^2+4x+4-2x-4+2=x^2+2x+2$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(-x-2)=f(x)$

3) on a $-x-2\neq x$ mais $f(-x-2)=f(x)$

Par exemple : x=1 alors $-1-2\neq 1$ c'est-à-dire : $-3\neq 1$mais : $f(-3)=f(1)$

Donc : $\left(\exists(1;-3)\in\mathbb{R}^2\right)/\ f(1)=f(-3)\ et\ 1\neq -3$

C'est-à-dire : $\overline{P}$ est une assertion vraie
Par suite : P est une assertion fausse
4) f est une application non injective

Exercice3 : (1 ,5pts) :
1) Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :
$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow x=y\ \ ou\ \ xy=1\right)$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$;

Supposons que : $xy^2-x^2y=y-x$ et montrons que : $x=y\ \ ou\ \ xy=1$

$xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow xy(y-x)=y-x\Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0\Rightarrow(y-x)(xy-1)=0$

$\Rightarrow y-x=0\ ou\ xy-1=0\Rightarrow y=x\ ou\ xy=1$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow x=y\ \ ou\ \ xy=1\right)$

Exercice4 : (5pts) Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$; $y\in\mathbb{R}^{*+}$

On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right):\ \frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrer que : $A\geq(a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

Solution : 1) a) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}\Leftrightarrow\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right):\ \frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

2) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

On a : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right):\ \frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ et puisque : $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^{*+}$ on appliquant cette inégalité

On a donc : $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ donc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ et comme : $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

Alors : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrons que : $A \geq (a+1)^2$

On a : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$ et comme : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}} \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{xy}$

Donc : $1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}\geq 1+2a+a^2$ c'est-à-dire : $A\geq (a+1)^2$

3) Déduisons que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

On a : $A\geq (a+1)^2$ c'est-à-dire : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq (a+1)^2$

Or on a : $x+y=1$ et $\frac{x+y}{2}\geq \sqrt{xy}$ donc : $\frac{1}{2}\geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 2 \Rightarrow a\geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq (a+1)^2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq (2+1)^2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$$

Exercice5 : (1,5pts) :

$\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrer que : $\left|2x^2+5xy+3y^2\right|\leq 3 \Rightarrow |x+y|\leq\sqrt{3}\ \ ou\ \ |2x+3y|\leq\sqrt{3}$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $|x+y|\succ\sqrt{3}\ \ et\ \ |2x+3y|\succ\sqrt{3} \Rightarrow \left|2x^2+5xy+3y^2\right|\succ 3$

$$|x+y|\succ\sqrt{3}\ \ et\ \ |2x+3y|\succ\sqrt{3} \Rightarrow |2x+3y||x+y|\succ\sqrt{3}\times\sqrt{3} \Rightarrow |(2x+3y)(x+y)|\succ 3$$

$$\Rightarrow \left|2x^2+3xy+2xy+3y^2\right|\succ 3 \Rightarrow \left|2x^2+5xy+3y^2\right|\succ 3$$

Donc : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\ \ |x+y|\succ\sqrt{3}\ \ et\ \ |2x+3y|\succ\sqrt{3} \Rightarrow \left|2x^2+5xy+3y^2\right|\succ 3$

Alors : Par contraposition : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\left|2x^2+5xy+3y^2\right|\leq 3 \Rightarrow |x+y|\leq\sqrt{3}\ \ ou\ \ |2x+3y|\leq\sqrt{3}$

Exercice6 : (2pts)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ $S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $S_0=\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k a^k=(-1)^0 a^0=1$ et $\frac{a^1+1}{a+1}=1$

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k+(-1)^{2n+1}a^{2n+1}+(-1)^{2n+2}a^{2n+2}$

Remarque : $(-1)^{2n+2}=1$ car $2n+2$ pair et $(-1)^{2n+1}=-1$ car $2n+1$ impair

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}-a^{2n+1}+a^{2n+2}=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+1}(a+1)+a^{2n+2}(a+1)}{a+1}$

$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+2}-a^{2n+1}+a^{2n+3}+a^{2n+2}}{a+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$

$S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

Exercice7 : (5pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+2)$

Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

$H=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y^2-2y(x+1)+2x=0\}$

1) Montrer que : $F\subset E$

2) Déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) Montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles : $A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\}$;

$B=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\}$

a) Montrer que : $H=A\cup B$

b) Déterminer : $H\cap F$

Solution : 1) Montrons que : $F\subset E$?

On a : $(x;y)\in F\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=y^2+y^2-2y^2=0\Rightarrow(x;y)\in E$

Donc : $F\subset E$

2) $(1;y)\in E\Leftrightarrow 1-y-2y^2=0\Leftrightarrow(1+y)(1-2y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ ou $y=\frac{1}{2}$

Donc : $\left(1;\frac{1}{2}\right)\in E$ ou $\left(1;\frac{1}{2}\right)\notin F$

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2 / (x;y)\notin F$ et $(x;y)\in E$

Donc : $E\not\subset F$

3) $(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0\Leftrightarrow x^2-2xy+xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0\Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0$

$\Leftrightarrow(x+y)(x-2y)=0\Leftrightarrow x+y=0$ ou $x-2y=0$

$\Leftrightarrow(x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Avec : $G=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x-2y=0\right\}$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ (x;y)\in E \Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Donc : $E=F\cup G$

4) a) $(x;y)\in H \Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[y-(x+1)\right]^2=(x+1)^2-2x \Leftrightarrow \left[y-(x+1)\right]^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow y=x+1+\sqrt{x^2+1}$ ou $\Leftrightarrow y=x+1-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x;y)\in A$ ou $(x;y)\in B$

Donc : $H=A\cup B$

4) b) $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in H$ ou $(x;y)\in F$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+2x-2y=0$ et $x=-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x^2+2x+2x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+4)=0 \\ x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ ou \ x=-\frac{4}{3} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \ x=0 \ et \ y=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{3} \ et \ y=\frac{4}{3}$$

Donc : $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$

$H\cap F=\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien