http://www.xriadiat.com **DS1: B** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice1 : (9pts) : $(1{,}5\text{pts}\times 6)$

Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) P_1 : «$(\forall n\in\mathbb{N})$; $6n+5$ est un nombre premier »

2) P_2 : « $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$ »

3) P_3 : « $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1$ »

4) P_4 : « $\forall x\in\mathbb{R}:|x-2|\leq x^2-2x+3$ »

5) P_5 : « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});0\prec y^2-x-1$

6) P_6 :« $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ »

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1}$:«$(\exists n\in\mathbb{N})/\ 6n+5$ n'est pas un nombre premier » est vraie

En effet : pour $(\exists n=12\in\mathbb{N})$ *et* $6\times 12+5=72+5=77=7\times 11$

77 n'est pas un nombre premier ($n=12$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 :est <u>fausse</u>

2) Montrons que : $P_2 : \forall n\in\mathbb{N}:\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$ est vraie

Soit $n\in\mathbb{N}$: Par l'absurde, supposons que :: $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6}=m$

$\frac{4n+3}{6}=m\Leftrightarrow 4n+3=6m\Rightarrow 3=6m-4n\Rightarrow 3=2(3m-2n)\Rightarrow 3=2k$ avec $k=3m-2\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 3$ est pair !. C'est une contradiction car on sait que : 3 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}:\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$

Autre procédure : $3=2(3m-2n)\Rightarrow 3=2k\Rightarrow$ 2 divise 3 $\Rightarrow$ absurde car on sait que : 2 ne divise pas 3

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

3) Montrons que : P_3 : « $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1$ » est vraie

Utilisons un Raisonnement par contraposition : Montrons que : $\frac{3x}{x+1}=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x+1}=1\Rightarrow 3x=x+1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow 2x=1$

Alors : Par contraposition : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1$

$\overline{P_3}:\exists x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}$ et $\frac{3x}{x+1}=1$

4) P_4 : « $\forall x\in\mathbb{R}:|x-2|\leq x^2-2x+3$ »

Soit $x\in\mathbb{R}$: <u>Premier cas :</u> si $x-2\geq 0$ c'est-à-dire ; : $x\geq 2\Rightarrow|x-2|=x-2$

$x^2-2x+3-(x-2)=x^2-2x+3-x+2=x^2-3x+5$: $\Delta=(-3)^2-20=-11\prec 0$

Comme : $a=1\succ 0$ alors : $x^2-3x+5\succ 0$ est une proposition vraie

Alors : $x^2-2x+3-(x-2)\succ 0$

Alors : si $x\geq 2$: $|x-2|\leq x^2-2x+3$

<u>2 ieme cas :</u> si : $x-2\prec 0$ c'est-à-dire ; $x\prec 2\Rightarrow|x-2|=-x+2$

$x^2-2x+3-(-x+2)=x^2-2x+3+x-2=x^2-x+1$: $\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$

$x^2-2x+3-(-x+2)\succ 0$ Alors : si $x\prec 2$: $|x-2|\leq x^2-2x+3$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas : P_4 : « $\forall x\in\mathbb{R}:|x-2|\leq x^2-2x+3$ » est vraie

$\overline{P_4}$: « $\exists x\in\mathbb{R}:|x-2|\succ x^2-2x+3$ »

5) P_5 : « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});0\prec y^2-x-1$

« $0\prec y^2-x-1\Leftrightarrow x+1\prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-2$ et on trouve : $(\forall y\in\mathbb{R});-1\prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_5 : est vraie.

$\overline{P_5}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});0\geq y^2-x-1$

6) Montrons $P_6(n)$:« $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ » est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Nous allons démontrer par récurrence que $P_6(n)$:est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $2^0=1\geq 1+0$ donc $1\geq 1$.

Donc $P_6(0)$: est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que $P_6(n)$:soit vraie

c'est-à-dire : $2^n\geq 1+n$

3étapes : Nous allons montrer que $P_6(n+1)$: est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 2+n$??

On a : $2^n\geq 1+n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $2^n\times 2\geq(1+n)\times 2$

Donc : $2^{n+1}\geq 2n+2$ et $2n+2\geq n+2$ car $2n+2-(n+2)=2n+2-n-2=n\geq 0$

Donc : $2^{n+1}\geq 2+n$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence

$P_6(n)$:« $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ » est vraie

Exercice2 : (4pts) : $(1\text{pts}\times 4)$ Soient : $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x+y=1$

1)Montrer que : $(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2\geq 2ab$

2) a) Montrer que : $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

b) Montrer que : $1-xy\geq\frac{3}{4}$ c) Montrer que : $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

3)Déduire que :si $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

Solution : Soit :$(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2\geq 2ab$ est aussi une Proposition vraie

2) a) Montrons que : $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

Soient : $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{x^2(y+1)+y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2y+x^2+y^2x+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2y+y^2x+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}$$

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}$$

Comme : $x+y=1\Rightarrow (x+y)^2=1\Rightarrow x^2+y^2+2xy=1\Rightarrow x^2+y^2=1-2xy$

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy\times 1+1-2xy}{(x+1)(y+1)}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$$

b) Montrons que : $1-xy\geq\frac{3}{4}$

On a : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2\geq 2ab$ donc : $x^2+y^2\geq 2xy$ et $x^2+y^2=1-2xy$

Alors : $1-2xy\geq 2xy\Rightarrow 1\geq 4xy\Rightarrow xy\leq\frac{1}{4}\Rightarrow -xy\geq-\frac{1}{4}\Rightarrow 1-xy\geq 1-\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{1-xy\geq\frac{3}{4}}$

c) Montrons que : $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

Comme : $x+y=1\Rightarrow x+1+y+1=1+1+1\Rightarrow (x+1)+(y+1)=3$

$\Rightarrow\left[(x+1)+(y+1)\right]^2=9\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+2(x+1)(y+1)=9$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=9-2(x+1)(y+1)\Rightarrow 9-2(x+1)(y+1)\geq 2(x+1)(y+1)$

$\Rightarrow 9\geq 4(x+1)(y+1)\Rightarrow (x+1)(y+1)\leq\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

3)Déduisons que :si $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

On a : $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}=(1-xy)\frac{1}{(x+1)(y+1)}$

$1-xy\geq\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}\Rightarrow (1-xy)\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

Exercice3 : (2pts) : $A = [0;1[$: et $B = \left\{ \frac{x}{x+1} / x \in \mathbb{R}^+ \right\}$

Montrons que : $A = B$

Solution : Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A = B$, on montre que : $A \subset B$ et que $B \subset A$.

a) Montrons que $A \subset B$?

Soit $y \in A \Rightarrow 0 \le y \prec 1$ Montrons que : $y \in B$

C'est-à-dire : Montrons que : $\exists x \in \mathbb{R}^+ / y = \frac{x}{x+1}$

$y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = x \Leftrightarrow xy + y = x \Leftrightarrow x(1-y) = y$

$y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}^+$ Car $0 \le y \prec 1$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}^+ / y = \frac{x}{x+1}$

Par suite : $y \in B$ et alors : $A \subset B$

a) Montrons que $B \subset A$?

Soit $y \in B \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ / y = \frac{x}{x+1}$

Montrons que : $y \in A$

C'est-à-dire : Montrons que : $0 \le y \prec 1$?

On a : $x \in \mathbb{R}^+ \ et\ y = \frac{x}{x+1}$ donc : $0 \le y$

$1 - y = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \succ 0$ Car $0 \le x$

Donc : $y \prec 1$ et alors : $0 \le y \prec 1$

Donc : $y \in A$

Par suite : $B \subset A$

Conclusion : $A = B$

Exercice4 : (3pts) : Soit l'application f : $\left[\frac{-1}{4}; +\infty\right[\to \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$

$x \mapsto f(x) = \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$: Résolvons dans : $\left[\frac{-1}{4}; +\infty\right[$ l'équation $f(x) = y$

Soit : $x \in \left[\frac{-1}{4}; +\infty\right[$: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y - \frac{5}{2}$

$x + \frac{1}{4} \ge 0$ car $x \in \left[\frac{-1}{4}; +\infty\right[$ et $y - \frac{5}{2} \ge 0$ car $y \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$

$f(x) = y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ Et on a : $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ge -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x \in \left[\frac{-1}{4}; +\infty\right[$

Donc : $\forall y \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[\ \exists! x \in \left[\frac{-1}{4}; +\infty\right[$ tel que : $f(x) = y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ y\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

Donc : $\forall x\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$; $f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$f^{-1}:\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\to\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

$x\mapsto f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

Exercice5 : (2pts) : Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\(n;m)\mapsto(n-m)^2\end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

Solution : 1)

- f est injective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  C'est-à-dire : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  $f(n;m)=f(n';m')\Rightarrow(n;m)=(n';m')$

- f n'est pas injective si et seulement s'il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')$ *et* $(n;m)\neq(n';m')$

Si je trouve : $(n;m)\neq(n';m')$ et $f(n;m)=f(n';m')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)$ *et* $(1;0)$

On a : $f(1;2)=(1-2)^2=1$ et $f(1;0)=(1-0)^2=1$

Donc : : $\exists(1;2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(1;0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(1;2)=f(1;0)$ Mais $(1;2)\neq(1;0)$

Donc : f n'est pas injective

2)

- f est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  Tel que : $f(n;m)=p$

- f n'est pas surjective si et seulement si il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists p\in\mathbb{N}$; $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq p$

- Si je trouve : $p\in\mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on peut affirmer que f n'est pas surjective.

Si je prends : $p=3$

On a : $f(n;m)=3 \Leftrightarrow (n-m)^2=3 \;\; \Leftrightarrow n-m=\sqrt{3}$

Mais :il n'existe pas : $(n;m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n-m=\sqrt{3}$

Donc : $\exists 3 \in \mathbb{N}$; $\forall (n;m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m) \neq 3$

Donc : f n'est pas surjective.

Remarque : il existe des éléments de $\mathbb{N}$ qui ont des antécédents dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Par exemple : $p=4$

$f(n;m)=4 \Leftrightarrow (n-m)^2=4 \Leftrightarrow n-m=2 \, ou \; n-m=-2$

Il existe : $(3;1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $(3-1)^2=4$

C'est-à-dire : $4 \in \mathbb{N}$ a au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$(pas suffisant pour affirmer que f est surjective car il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivé aient des antécédents par f

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien