http://www.xriadiat.com **DS1: A** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Durée :2 heures

Exercice 1 : (9pts) : $(1{,}5\text{pts}\times 6)$

Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); x+\frac{16}{x} \succ 8$

2) $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+5}{n+4} \neq 1$

3) $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$

4) $P_4 : (\forall n \in \mathbb{N}); n^2+3n+2023$ est un entier impair

5) $P_5 : \forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}\ \ (x+3)(y-3)=(x-3)(y+3) \Rightarrow x=y$

6) $P_6 : \forall n \in \mathbb{N}\ ; n^3-n$ est divisible par 3

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}^{*+}); x+\frac{16}{x} \leq 8$ est vraie

En effet : pour $(4 \in \mathbb{R}^{*+})$ *et* $4+\frac{16}{4}=8\leq 8$ ($x=4$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 :est <u>fausse</u>

Remarque : comment faire pour trouver ce contre-exemple ?

$x+\frac{16}{x} \succ 8 \Leftrightarrow \frac{x^2+16}{x} \succ 8 \Leftrightarrow x^2+16 \succ 8x \Leftrightarrow x^2-8x+16 \succ 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \succ 0$

Mais cette inégalité n'est pas vérifiée pour : $x=4$

2)Montrons que : $P_2 :\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \frac{n+5}{n+4} \neq 1$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$: Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+5}{n+4}=1$

$\frac{n+5}{n+4}=1 \Leftrightarrow n+5=n+4 \Rightarrow 5=4$! C'est une contradiction car on sait que : $5\neq 4$

Ceci signifie : $P_2 :\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \frac{n+5}{n+4} \neq 1$ est vraie

$\overline{P_2} : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n+5}{n+4}=1$

3) Montrons que : $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$ est vraie

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y}\Rightarrow x=y$ est vraie

Soient $x\in\mathbb{R}^*$ *et* $y\in\mathbb{R}^*$;

On a : $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y}\Rightarrow x(5+y)=y(5+x)\Rightarrow 5x+xy=5y+xy\Rightarrow 5x=5y\Rightarrow x=y$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*;\forall y\in\mathbb{R}^*$ $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y}\Rightarrow x=y$

Alors par contraposition on déduit que : $\forall x\in\mathbb{R}^*;\forall y\in\mathbb{R}^*$: $x\neq y\Rightarrow\frac{x}{5+x}\neq\frac{y}{5+y}$

Ceci signifie : $P_3:\forall x\in\mathbb{R}^*;\forall y\in\mathbb{R}^*$: $x\neq y\Rightarrow\frac{x}{5+x}\neq\frac{y}{5+y}$ **est vraie**

$\overline{P_3}:\exists x\in\mathbb{R}^*;\exists y\in\mathbb{R}^*$: $x\neq y$ *et* $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y}$

4) $P_4:(\forall n\in\mathbb{N});n^2+3n+2023$ est un entier impair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de n , il est parfois utile de faire une **disjonction de cas** : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre n.

On peut, par exemple, séparer les cas où n est un entier pair des cas où n est impair

Premier cas : si n est pair : alors n^2 est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Alors : $3n$ est pair (comme produit d'un nombre pair et un nombre impair)

Donc : n^2+3n est pair (comme somme de nombres pairs)

D'autre part : 2023 est impair

Donc : $n^2+3n+2023$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

2 iem cas : si n est impair : alors n^2 est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Alors : $3n$ est impair (comme produit de nombres impairs)

Donc : n^2+3n est pair (comme somme de nombres impairs)

D'autre part : 2023 est impair

Donc : $n^2+3n+2023$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

P_4 : « $(\forall n\in\mathbb{N});n^2+3n+2023$ est un entier impair » **est vraie**

$\overline{P_4}:(\exists n\in\mathbb{N})$ / $n^2+3n+2023$ est un entier pair

5) Montrons que : $P_5:\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$ $(x+3)(y-3)=(x-3)(y+3)\Rightarrow x=y$ est vraie ?

Soient $x\in\mathbb{R}$ *et* $y\in\mathbb{R}$;

On a : $(x+3)(y-3)=(x-3)(y+3)\Rightarrow xy-3x+3y-6=xy+3x-3y-6$

$$\Rightarrow -6x=-6y\Rightarrow x=y$$

Donc : $(x+2)(y-2)=(x-2)(y+2)\Rightarrow x=y$

La proposition P_5 : est vraie

$\overline{P_5}:\exists x\in\mathbb{R};\exists y\in\mathbb{R}$ $(x+3)(y-3)=(x-3)(y+3)$ *et* $x\neq y$

6) Montrons P_6 : «$\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3 » est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ ;\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3 - 0 = 0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 - (n+1) = 3k'$??

$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = 3k + 3(n^2 + n) = 3(k + n^2 + n) = 3k'$

Avec $k' = k + n^2 + n \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : P_6 : «$\forall n \in \mathbb{N}$; $n^3 - n$ est divisible par 3 » est vraie

$\overline{P_6}$: «$\exists n \in \mathbb{N}$; $n^3 - n$ n'est pas divisible par 3 »

Exercice2: (2pts) 1) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Traduire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs puis nier les propositions :

a) L'application f est injective

b) L'application f est surjective

c) L'application f est bijective

2) Soit f L'application de : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = x^2 + 6x - 7$

On considère la proposition suivante : $Q : \left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

a) Ecrire la négation de Q

b) Calculer : $f(1)$ et $f(-7)$

c) En déduire la valeur de vérité de la proposition Q

d) Ecrire la contraposé de Q et donner sa valeur de vérité

e) Que peut-on dire de l'application f

Solution :1) a) L'application f est injective

$P : (\forall x_1 \in \mathbb{R}) ; (\forall x_2 \in \mathbb{R}) / x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ou encore $P : (\forall x_1 \in \mathbb{R}) ; (\forall x_2 \in \mathbb{R}) / f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\overline{P} : (\exists x_1 \in \mathbb{R}) ; (\exists x_2 \in \mathbb{R}) / x_1 \neq x_2 \ et \ f(x_1) = f(x_2)$

b) L'application f est surjective signifie que : tout réel possède un antécédent par f :

$P : (\forall y \in \mathbb{R}) ; (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = y$;

$\overline{P} : (\exists y \in \mathbb{R}) ; (\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \neq y$

c) L'application f est bijective

$P : (\forall y \in \mathbb{R}) ; (\exists! x \in \mathbb{R}) / f(x) = y$;

$\overline{P} : (\exists y \in \mathbb{R}) ; (\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \neq y$ ou $(\exists x_1 \in \mathbb{R}) ; (\exists x_2 \in \mathbb{R}) / x_1 \neq x_2 \ et \ f(x_1) = f(x_2)$

2) Remarque : "$non(U \Rightarrow V)$" est "$U \ et \ non(V)$"

a) $\overline{Q}$: $\left(\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) : x \neq y \ et \ f(x) = f(y)$

b) $f(1) = 1^2 + 6 \times 1 - 7 = 7 - 7 = 0$ et $f(-7) = (-7)^2 + 6 \times (-7) - 7 = 49 - 42 - 7 = 0$

c) On a : $f(1)=0$ et $f(-7)=0$

Donc $:\left(\exists(1;-7)\in\mathbb{R}^2\right):1\neq-7\ et\ f(1)=f(-7)$

Donc : $\overline{P}$:est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

d) la contraposé de P est : $:\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Puisque : P est une proposition fausse alors la contraposé de P est aussi fausse

e) L'application f n'est pas injective

Exercice3 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

Monter que par contraposition les assertions suivantes :

1) $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

2) $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

Solution : 1) Montrons que : $A\neq B\Rightarrow A\cap B\neq A\cup B$

On suppose que : $A\neq B$

Alors : $\exists x\in A-B$ ou $\exists x\in B-A$

1ér cas : $\exists x\in A-B$

$x\in A-B\Rightarrow x\in A$ et $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$

$\Rightarrow A\cup B\neq A\cap B$

2ér cas : $\exists x\in B-A$

$x\in B-A\Rightarrow x\in B$ et $x\notin A$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$

$\Rightarrow A\cup B\neq A\cap B$

Donc : $A\neq B\Rightarrow A\cap B\neq A\cup B$

Par contraposition on déduit que :

$A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

2) Montrons que : $B\neq C\Rightarrow A\cap B\neq A\cap C$ ou $A\cup B\neq A\cup C$

On suppose que : $B\neq C$

Alors : $\exists x\in B-C$ ou $\exists x\in C-B$

1ér cas : $\exists x\in B-C\Rightarrow x\in B$ et $x\notin C$

Si $x\in A$ alors : $x\in A\cap B$ et $x\notin A\cap C$

$\Rightarrow A\cap B\neq A\cap C$

Si $x\notin A$ alors : $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cup C$

$\Rightarrow A\cup B\neq A\cup C$

Donc : $B\neq C\Rightarrow A\cap B\neq A\cap C$ ou $A\cup B\neq A\cup C$

Par contraposition on déduit que :

$A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

Exercice4 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^4-2x^2\end{array}$

1)a) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$

b) f est-elle injective ?

2)a) Déterminer $f(\mathbb{R})$

b) f est-elle surjective ?

Solution :1) a) Soit $x\in\mathbb{R}$: $x\in f^{-1}(\{0\})\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^4-2x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x^2-2=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=-\sqrt{2} \quad ou \quad x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}$

Donc : $f^{-1}\left(\{0\}\right)=\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}$

b) f n'est pas injective car :

On a : $f(0)=f\left(\sqrt{2}\right)=0$ mais $0\neq\sqrt{2}$

$\forall x\in\mathbb{R}^+$ On a : $f(x)\leq 3$

Donc par exemple l'équation : $f(x)=4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

$f^{-1}(B)=\left\{x\in\mathbb{R}/ f(x)\in B\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/-1\leq f(x)\leq 4\right\} =\left\{x\in\mathbb{R}/-1\leq x^2\leq 4\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/ 0\leq x^2\leq 4\right\}$

$=\left\{x\in\mathbb{R}/-2\leq x\leq 2\right\}=[-2;2]$

Donc : $f^{-1}(B)=[-2;2]$

Exercice5 : $3\text{pts}(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soit l'application : $f:]2;+\infty[\to]5;+\infty[$

$x\mapsto\frac{5x}{x-2}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : 1) $f(x)=\frac{5x}{x-2}$

Soient $x_1\in]2;+\infty[$ et $x_2\in]2;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{5x_1}{x_1-2}=\frac{5x_2}{x_2-2}\Rightarrow\frac{x_1}{x_1-2}=\frac{x_2}{x_2-2}\Rightarrow x_1(x_2-2)=x_2(x_1-2)$

$\Rightarrow x_2x_1-2x_1=x_1x_2-2x_2\Rightarrow-2x_1=-2x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

2)Soient $y\in]5;+\infty[$

Résolvons dans $]2;+\infty[$ l'équation : $f(x)=y$

Soit : $x\in]2;+\infty[$

$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{5x}{x-2}=y\Leftrightarrow 5x=y(x-2)$ car $x\in]2;+\infty[$ donc $x-2\neq 0$

$\Leftrightarrow 5x-xy=-2y \quad\Leftrightarrow x(5-y)=-2y$

$y\in]5;+\infty[$ Donc $5-y\neq 0$ $\Leftrightarrow x=\frac{-2y}{5-y}=\frac{2y}{y-5}$

Vérifions que : $x=\frac{2y}{y-5}\in]2;+\infty[$???

$\frac{2y}{y-5}-2=\frac{2y-2y+10}{y-5}=\frac{10}{y-5}\succ 0$ Car $y\in]5;+\infty[$

Donc : $x=\frac{2y}{y-5}\in]2;+\infty[$

Donc $\forall y\in]5;+\infty[\ \exists x\in]2;+\infty[\ / f(x)=y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.
3) On a d'après les questions précédentes que l'application f est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application f est bijective.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-5} \\ y \in]5;+\infty[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in]5;+\infty[\;;\; f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-5}$

$f^{-1} :]5;+\infty[\to]2;+\infty[$

$x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-5}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien