http://www.xriadiat.com **DL1: T** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes : La LOGIQUE ; ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Montrer que : 1) $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\sqrt{4+2x^2}\neq 2+\frac{x^2}{2}$

Exercice2 : 1) Montrer que : $\forall (x;y)\in([0;+\infty[)^2$; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) Déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

3) Déduire que : $\forall (a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Exercice3 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si n est non divisible par 3 alors n^2-1 est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall (a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3

Exercice4 :1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice5 : Soit $n\in\mathbb{N}$ considérons : $P(n)=n^2+4n+7$

1)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$

2)En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

Exercice6: Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sqrt{\frac{n}{n+2}}\notin\mathbb{Q}$

Exercice7 : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

a) $D=\{n\in\mathbb{Z}/n/6\}$

b) $A=\{n\in\mathbb{Z}/n+1\geq n^2\}$

c) $B=\{x\in\mathbb{Q}/(x^2-3)(x^2-3x+2)=0\}$

d) $C=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{17}{n^2+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Répondre par Vraie ou faux :

a) $\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right\}\subset$ D : l'ensemble des nombres décimaux

b) $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\}\subset\mathbb{R}^*$

c) $\{-1;0;1\}\subset\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice8 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E=\{1;2;3;4;5\}$ telles que :

$A\cup B=\{2;3;4;5\}$ et $A\cap B=\{2;4\}$ et $A\cap C=\{2;3\}$ et $A\cup C=\{1;2;3;4\}$

1) Déterminer : A ; B ; C

2) Déterminer : $A\Delta B$ et $B\Delta C$ et $C\Delta A$ Et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

Exercice9 : Donner Le complémentaire des ensembles suivants :

1) L'ensemble $\mathbb{Q}$ 2) L'intervalle $[a;b[$ $a \prec b$

Exercice10 : $E=\{1;2;3;4\}$;

1) Soit f l'application de l'ensemble $E=\{1;2;3;4\}$ dans l'ensemble $F=\{a;b;c;d\}$ définie par :

$f(1)=c$; $f(2)=a$; $f(3)=b$; $f(4)=b$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{2\}$; $A=\{2;3;4\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{b\}$; $B=\{a;b\}$; $B=\{d\}$

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{-1;1\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{2\}$; $B=\{1;3\}$

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2-2x+1} \end{array}$; Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Exercice12 : Soit les 2 applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto(-1)^n \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \end{array}$

Est-ce que $f=g$?

Exercice13 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E

1) Que pensez-vous de l'implication : $A\cup B\not\subset C \Rightarrow (A\not\subset C$ ou $B\not\subset C)$? Justifiez

2) On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$.
Montrer que $B\subset C$.

Exercice14 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $A\cup B=B\cap C$

Exercice15 :1) Soient $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$ et $m\in\mathbb{N}-\{0;1\}$ Montrer que : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\le\frac{1}{2}$.

2) l'application définie par : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}-\{0;1\}\to\mathbb{Q} \\ (n;m)\mapsto n+\frac{1}{m} \end{array}$

a) Montrer que f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Exercice16 : Fonctions caractéristiques

Soit A une partie d'un ensemble E. On lui associe l'application suivante : $\begin{array}{l} I_A:E\to\{0;1\} \\ x\mapsto\begin{cases}1 & si\ \ x\in A\\ 0 & si\ \ x\notin A\end{cases} \end{array}$

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

a) $I_{B-A}=I_B-I_A$ si A ⊆ B. b) $I_{A\cap B}=I_A\times I_B$

c) $I_{A\cup B}=I_A+I_B$, si A et B sont disjointes. d) $I_{A\cup B}=I_A+I_B-I_{A\cap B}$

2) On note F(E, {0, 1}) l'ensemble des applications de E dans {0, 1}.

Montrer que l'application : $\begin{array}{l} f:P(E)\to\mathrm{F}(\mathrm{E},\ \{0,\ 1\}) \\ A\mapsto I_A \end{array}$ est une bijection.

3) Soit C ∈ P(E). Montrer que A∆B = A∆C si, et seulement si B = C. (En ne faisant que des calculs de fonctions caractéristiques.)

Exercice17 : Soient E et F deux ensembles.

1) Montrons que : $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)\subseteq\mathcal{P}(E\cup F)$. 2) Montrons que : $\mathcal{P}(E\cap F)=\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.