http://www.xriadiat.com **DL1: T** **PROF: ATMANI NAJIB**

# 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

## *Correction :* Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

**Exercice1 :** Montrer que :

1) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ : $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}^*: \sqrt{4+2x^2}\neq 2+\frac{x^2}{2}$

**Solution : 1)**Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ : Montrons que : $\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ou\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Rightarrow 2xy2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2=1$

$\Rightarrow 2xy-\sqrt{2}y-\sqrt{2}x+1=0\Rightarrow 2y\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2y-\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\ ou\ 2y-\sqrt{2}=0\ \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}=0\ ou\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Par contraposition on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ : $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2)Par l'absurde, supposons que : $\exists x\in\mathbb{R}^*: \sqrt{4+2x^2}=2+\frac{x^2}{2}$

$\sqrt{4+2x^2}=2+\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow 2x^2+4=4+2x^2+\frac{x^4}{4}\Leftrightarrow\frac{x^4}{4}=0\Leftrightarrow x^4=0\Leftrightarrow x=0$ !

C'est une contradiction car on sait que : $x\in\mathbb{R}^*$

Ceci signifie : $\forall x\in\mathbb{R}^*: \sqrt{4+2x^2}\neq 2+\frac{x^2}{2}$

**Exercice2 :** 1) Montrer que : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) Déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

3) Déduire que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ ; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

**Solution :1)** Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ :On a : $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$

Et puisque on a : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$ ; $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ (vraie)

Alors : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ ; on a : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

Par exemple on prend : $x$ $et$ $\frac{1}{x}$ et on applique la proposition :

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{1}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

3) Déduisons que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ ; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Soit $(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ : on a : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

On donc : d'après 1) si on prend : $x=\frac{a^2+1}{b}$ et $y=\frac{b^2+1}{a}$

On aura : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{b}\times\frac{b^2+1}{a}}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}$

On donc : d'après 2) $a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow\frac{a^2+1}{a}\geq 2$ et aussi $b+\frac{1}{b}\geq 2\Leftrightarrow\frac{b^2+1}{b}\geq 2$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}\geq 2\sqrt{2\times 2}$ c'est-à-dire : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Par suite : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ ; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

**Exercice3 :** Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si $n$ est non divisible par 3 alors $n^2-1$ est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$ ; $ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3

**Solution :**1) Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n$ non divisible par 3

Il y'a deux façons d'écrire $n$ : $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement par disjonction des cas :

<u>1ére cas :</u> si $n=3k+1$ : $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k=3(3k^2+2k)=3k'$ avec :

$k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2-1$ est un multiple de 3 dans ce cas

<u>2ére cas :</u> si $n=3k+2$

$n^2-1=(3k+2)^2-1=9k^2+12k+4-1=9k^2+12k+3=3(3k^2+4k+1)=3k'$

Avec : $k'=3k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $n^2-1$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le nombre $n^2-1$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n$ est non divisible par 3

2) Soit $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ : $ab(a^2-b^2)=ab(a^2-1+1-b^2)=ab((a^2-1)-(b^2-1))$

<u>1ére cas :</u> si $a$ est divisible par 3 ou $b$ est divisible par 3

Alors : $ab$ est divisible par 3 et par suite : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

<u>2ére cas :</u> $a$ n'est pas divisible par 3 ou $b$ n'est pas divisible par 3

D'après 1) : $a^2-1$ est divisible par 3 et $b^2-1$ est divisible par 3

$(\exists k\in\mathbb{N});(\exists k'\in\mathbb{N})$ tels que : $a^2-1=3k$ et $b^2-1=3k'$

$ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)=ab\left(3k-3k'\right)=3ab\left(k-k'\right)=3k''$ Avec : $k'=ab\left(k-k'\right)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$ ; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

**Exercice4 :1)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ : $3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

**Solution :1)** 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :

$3^{5\times0}+4^{5\times0+2}+5^{5\times0+1}=1+16+5=22=2\times11$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}=11k$ donc : $\exists k\in\mathbb{N}/3^{5n}=11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/3^{5n+5}+4^{5n+5+2}+5^{5n+5+1}=11k'$ ??

$$3^{5n+5}+4^{5n+5+2}+5^{5n+5+1}=3^{5n}\times3^5+4^{5n+2}\times4^5+5^{5n+1}\times5^5$$

$$=\left(11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}\right)\times3^5+4^{5n+2}\times4^5+5^{5n+1}\times5^5=11k\times3^5-4^{5n+2}\times3^5-5^{5n+1}\times3^5+4^{5n+2}\times4^5+5^{5n+1}\times5^5$$

$$=11k\times3^5+\left(4^5-3^5\right)4^{5n+2}+\left(5^5-3^5\right)5^{5n+1}=11k\times3^5+(1024-243)4^{5n+2}+(3125-243)5^{5n+1}$$

$$=11k\times3^5+781\times4^{5n+2}+2882\times5^{5n+1}=11k\times3^5+71\times11\times4^{5n+2}+262\times11\times5^{5n+1}$$

$=11\left(k\times3^5+71\times4^{5n+2}+262\times5^{5n+1}\right)=11k'$ avec $k'=k\times3^5+71\times4^{5n+2}+262\times5^{5n+1}\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}:3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

2) Notons P(n) la proposition : "$S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{1-1}1^2=1$ et $\frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1}=1\times(-1)^2=1$ c'est-à-dire : P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$ ??

Remarque : $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n\times1=(-1)^n$ et

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2+(-1)^n(n+1)^2=S_n+(-1)^n(n+1)^2$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}+(-1)^n(n+1)^2=\frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^n+2(-1)^n(n+1)^2\right)$

Car : $(-1)^{n+1}=(-1)^n\times(-1)^1=-(-1)^n$

Donc : $S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)(-1)^n(-n+2(n+1))=\frac{1}{2}(-1)^n(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$ : $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

**Exercice5 :** Soit $n\in\mathbb{N}$ considérons : $P(n)=n^2+4n+7$

1)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$

2)En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

**Solution :** 1) $P(n)=n^2+4n+7=n^2+2\times n\times 2+2^2+3=(n+2)^2+3>(n+2)^2$

$P(n)=n^2+4n+7\prec n^2+6n+9$ en effet : $(n^2+6n+9)-(n^2+4n+7)=2n+2\succ 0$ : $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $P(n)\prec n^2+2\times n\times 3+3^2$ c'est-à-dire : $P(n)<(n+3)^2$ et comme : $(n+2)^2<P(n)$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$

2) Déduisons que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$ donc : $\sqrt{(n+2)^2}<\sqrt{P(n)}<\sqrt{(n+3)^2}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $|n+2|<\sqrt{P(n)}<|n+3|$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $n+2<\sqrt{P(n)}<n+3$ car $n+1\in\mathbb{N}$ et $n+2\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$ : $\sqrt{P(n)}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs :

$n+2$ *et* $n+3$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

**Exercice6:** Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\sqrt{\frac{n}{n+2}}\notin\mathbb{Q}$

**Solution :** Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\sqrt{\frac{n}{n+2}}\in\mathbb{Q}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists r\in\mathbb{Q}_+^*$ tel que : $\sqrt{\frac{n}{n+2}}=r$

$r\in\mathbb{Q}_+^*\Rightarrow\exists(a;b)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $r=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{\frac{n}{n+2}}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\frac{n}{n+2}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow nb^2=a^2(n+2)\Rightarrow nb^2=a^2(n+2)\Rightarrow\frac{a(n+2)}{nb}=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, a(n+2) = kb$ et $nb = ka$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, \frac{a}{b} = \frac{k}{n+2}$ et $\frac{n}{k} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, \frac{k}{n+2} = \frac{n}{k} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, n(n+2) = k^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, n^2 + 2n = k^2$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, n^2 \prec k^2 \prec n^2 + 2n + 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, n^2 \prec k^2 \prec (n+1)^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \,/\, n \prec k \prec n+1$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n$ *et* $n+1$

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

**Exercice7** : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

a) $D = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n/6\}$

b) $A = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n+1 \geq n^2\}$

c) $B = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, (x^2 - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$

d) $C = \left\{n \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{17}{n^2+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Répondre par Vraie ou faux :

a) $\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right\} \subset$ D : l'ensemble des nombres décimaux

b) $\left\{\sqrt{2}; \frac{1}{8}; 0\right\} \subset \mathbb{R}^*$

c) $\{-1; 0; 1\} \subset \left\{n \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{2n}{|n|+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

**Solution : 1)** a) $6 = 1 \times 2 \times 3$ : $D_6 = \{-1; 1; 2; -2; 3; -3; -6; 6\}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ : $n \in D \Leftrightarrow n/6 \Leftrightarrow n \in \{-1; 1; 2; -2; 3; -3; -6; 6\}$ Donc : $D = \{-1; 1; 2; -2; 3; -3; -6; 6\}$

b) $A = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n+1 \geq n^2\}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ : $n \in A \Leftrightarrow n+1 \geq n^2 \Leftrightarrow n^2 - n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq n^2 - n \leq 1$

$n \in A \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow n(n-1) = 0 \Leftrightarrow n - 1 = 0 \text{ ou } n = 0$

$n \in A \Leftrightarrow n = 1 \text{ ou } n = 0 \Leftrightarrow n \in \{0; 1\}$

Donc : $A = \{0; 1\}$

c) $B = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, (x^2 - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$

Soit $x \in \mathbb{Q}$ : $x \in B \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x \in B \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = 0$

$x \in B \Leftrightarrow x^2 = 3 \text{ ou } x^2 - 2x - (x - 2) = 0$

$x \in B \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } (x-2)(x-1) = 0$ Or $-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

$x \in B \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}$

Donc : $B = \{-2; 2\}$

d) $C = \left\{n \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{17}{n^2+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ : Soit $n \in \mathbb{Z}$ : $n \in C \Leftrightarrow \frac{17}{n^2+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n^2 + 1/17 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n^2 + 1 \in \{1; 17\}$ Car : $n^2 + 1 \geq 0$

$n \in C \Leftrightarrow n^2 + 1 = 1 \text{ ou } n^2 + 1 = 17 \Leftrightarrow n^2 = 0 \text{ ou } n^2 = 16 \Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } n = -4 \text{ ou } n = 4$

Donc : $C = \{-4; 0; 4\}$

**2)** a) Il faut montrer que : $-\frac{1}{5}\in D$ et $\frac{1}{2}\in D$

Or : $-\frac{1}{5}=-\frac{2}{10}=-\frac{2}{10^1}\in D$ et $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{5}{10^1}\in D$

Par suite : $\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right\}\subset D$ donc : **vraie**

b) $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\}\subset\mathbb{R}^*$ ?? On a : $\sqrt{2}\in\mathbb{R}^*$ et $\frac{1}{8}\in\mathbb{R}^*$ mais : $0\notin\mathbb{R}^*$

Par suite : $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\}\not\subset\mathbb{R}^*$ donc : **faux**

c) $\{-1;0;1\}\subset\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$? On pose : $A=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

On a : $-1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{2(-1)}{|-1|+1}=\frac{-2}{2}=-1\in\mathbb{Z}$ donc : $-1\in A$

Et On a : $0\in\mathbb{Z}$ et $\frac{2\times 0}{|0|+1}=\frac{0}{1}=0\in\mathbb{Z}$ donc : $0\in A$

Et on a : $1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{2\times 1}{|1|+1}=\frac{2}{2}=1\in\mathbb{Z}$ donc : $1\in A$

Donc : $\forall n\in\{-1;0;1\}\Rightarrow n\in A$

Donc : $\{-1;0;1\}\subset\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$ **vraie**

**Exercice8** : Soient $A$ ; $B$ ; $C$ trois parties d'un ensemble $E=\{1;2;3;4;5\}$ telles que :

$A\cup B=\{2;3;4;5\}$ et $A\cap B=\{2;4\}$ et $A\cap C=\{2;3\}$ et $A\cup C=\{1;2;3;4\}$

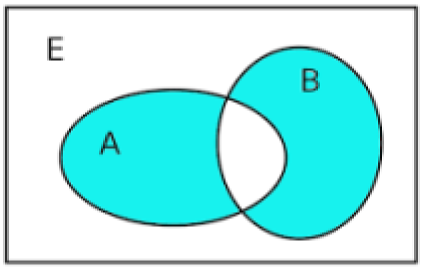
1) Déterminer : $A$ ; $B$ ; $C$

2) Déterminer : $A\Delta B$ et $B\Delta C$ et $C\Delta A$ Et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

**Solution : 1)** $A=\{2;3;4\}$ ; $B=\{2;4;5\}$ ; $C=\{1;2;3\}$

2) $A\Delta B==(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$A\Delta B=\{3;5\}$ et $B\Delta C=\{1;3;4;5\}$




$C\Delta A=\{1;4\}$ ; $(A\Delta B)\Delta C=\{3;5\}\Delta\{1;2;3\}=\{1;2;5\}$

$A\Delta(B\Delta C)=\{2;3;4\}\Delta\{1;3;4;5\}=\{1;2;5\}$

Donc : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

**Exercice9** : Donner Le complémentaire des ensembles suivants :

1) L'ensemble $\mathbb{Q}$ 2) L'intervalle $[a;b[$ $a \prec b$

**Solution :** 1) Le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels et se note $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

2) $\overline{[a;b[} = \{x \in \mathbb{R} / x \notin [a;b[\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b ou x \prec a\}$

$\overline{[a;b[} = ]-\infty;a[ \cup [b;+\infty[$

**Exercice10 :** $E = \{1;2;3;4\}$ ;

1) Soit $f$ l'application de l'ensemble $E = \{1;2;3;4\}$ dans l'ensemble $F = \{a;b;c;d\}$ définie par :

$f(1)=c$ ; $f(2)=a$ ; $f(3)=b$ ; $f(4)=b$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{2\}$ ; $A=\{2;3;4\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{b\}$ ; $B=\{a;b\}$ ; $B=\{d\}$

2) Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{-1;1\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{2\}$ ; $B=\{1;3\}$

**Solution :** a) Déterminons $f(A)$ : $f(A)=\{f(x)/x \in A\}$

$f(A)=f(\{2\})=\{a\}$

$f(A)=f(\{2;3;4\})=\{a;b\}$

b) $f^{-1}(B)=\{x \in E / f(x) \in B\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{b\})=\{3;4\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{a;b\})=\{2;3;4\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{d\})=\varnothing$

2) $f(x)=x^2$

a) $f(A)=f(\{-1;1\})=\{1\}$ car $f(-1)=f(1)=1$

b) $f^{-1}(B)=\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\}$

$x \in f^{-1}(\{2\}) \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ $ou$ $x=\sqrt{2}$

$f^{-1}(\{2\})=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

$x \in f^{-1}(\{1;3\}) \Leftrightarrow f(x) \in \{1;3\} \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ $ou$ $x=\sqrt{2}$

$x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ $ou$ $x=\sqrt{3}$

$x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ $ou$ $x=1$

$f^{-1}(f^{-1}(\{1;3\}))=\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}$

**Exercice11** : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \hline x \mapsto \sqrt{x^2-2x+1} \end{array}$ ; Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$

**Solution :** $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

Si $x \in ]-\infty;1]$ alors : $f(x)=-(x-1)=-x+1$

Donc : la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$ est l'application $\begin{array}{l} g:]-\infty;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x+1 \end{array}$

**Exercice12** : Soit les 2 applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto(-1)^n \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \end{array}$

Est-ce que $f=g$ ?

**Solution :** Deux applications $f$ et $g$ ont le même ensemble de départ $\mathbb{Z}$ et le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et on a : $g(n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n=f(n)$

Donc : $f=g$

**Exercice13 :** Soient $A$ ; $B$ ; $C$ des parties d'un Ensemble $E$

1) Que pensez-vous de l'implication : $A\cup B\not\subset C\Rightarrow(A\not\subset C$ ou $B\not\subset C)$ ? Justifiez (On pourra utiliser la contraposée).

2) On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$.
Montrer que $B\subset C$.

**Solution :** 1) La contraposée de cette implication est :
$(A\subset C$ et $B\subset C)\Rightarrow A\cup B\subset C$ Cette implication est vraie.
Donc : $A\cup B\not\subset C\Rightarrow(A\not\subset C$ ou $B\not\subset C)$ est aussi vraie

2) Prenons $x\in B$. Alors $x\in A\cup B$, alors $x\in A\cup C$ d'après l'hypothèse.
Si $x\in C$ c'est fini.
Si $x\in A\setminus C$ alors $x\in A\cap B$ (puisque l'on a pris $x\in B$), d'après l'hypothèse $x\in A\cap C$ ce qui entraine que $x\in C$. On a bien montré que $B\subset C$.

**Exercice14 :** Soient $A$ ; $B$ ; $C$ des parties d'un ensemble $E$ .
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $A\cup B=B\cap C$

**Solution :** $\Longrightarrow$) Analyse :
Si $A\cup B=B\cap C$
On sait que : $A\subset A\cup B$ donc : $A\subset B\cap C\subset B$
On sait que : $B\subset A\cup B$ donc : $B\subset B\cap C\subset C$
Donc : $A\subset B\subset C$
Donc : on a prouvé l'inclusion : $A\cup B=B\cap C\Rightarrow A\subset B\subset C\ (1)$

$\Longleftarrow$) Synthèse :
Si $A\subset B\subset C$ alors : $A\cup B=B$ et $B\cap C=B$
C'est-à-dire : $A\cup B=B\cap C$
Donc : on a prouvé l'inclusion : $A\subset B\subset C\Rightarrow A\cup B=B\cap C\ (2)$
D'après 1 et 2 on en déduit que :
$A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$
Conclusion : une condition nécessaire et suffisante pour que : $A\cup B=B\cap C$ est que : $A\subset B\subset C$

**Exercice15 :**1) Soient $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$ et $m\in\mathbb{N}-\{0;1\}$

Montrer que : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\le\frac{1}{2}$.

2) l'application définie par : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}-\{0;1\}\to\mathbb{Q} \\ (n;m)\mapsto n+\frac{1}{m} \end{array}$

a) Montrer que $f$ est injective ? b) $f$ est-elle surjective ?

**Solution :** 1) Soient $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$ et $m\in\mathbb{N}-\{0;1\}$

On a : $n\ge2$ et $m\ge2$ Donc : $0\prec\frac{1}{n}\le\frac{1}{2}$ et $0\prec\frac{1}{m}\le\frac{1}{2}$

Donc : $0 \prec \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ (1) et $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{m} \prec 0$ (2)

En additionnant (1) et (2) : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$

**2) a)** Soit : $(n;m)$ ; $(n';m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0;1\}$

Tel que : $f(n;m) = f(n';m')$ :

Montrons que : $(n;m) = (n';m')$ ??

$f(n;m) = f(n';m') \Leftrightarrow n + \frac{1}{m} = n' + \frac{1}{m'} \Leftrightarrow n - n' = \frac{1}{m'} - \frac{1}{m}$

D'après la première question cela montre que : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{m'} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$

Autrement dit : $-\frac{1}{2} \leq n - n' \leq \frac{1}{2}$ : avec $n - n' \in \mathbb{Z}$

Donc : $n - n' = 0$ c'est-à-dire : $n = n'$

Puis en reportant dans : $n - n' = \frac{1}{m'} - \frac{1}{m}$ Cela montre que $\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = 0$

Donc : $\frac{1}{m'} = \frac{1}{m}$ c'est-à-dire : $m = m'$

Finalement : $(n;m) = (n';m')$

Ce qui montre que $f$ est injective.
b) Regardons si $1 \in \mathbb{Q}$ admet un antécédent,
On suppose qu'il existe, On l'appelle : $(n;m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0;1\}$

$n + \frac{1}{m} = 1$ Ce qui équivaut à : $\frac{1}{m} = 1 - n$

Mais $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$ et $1 - n \in \mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent $f$ n'est pas surjective

**Exercice16** : Fonctions caractéristiques

Soit A une partie d'un ensemble E. On lui associe l'application suivante : $\begin{array}{l} I_A : E \to \{0;1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases} \end{array}$

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

a) $I_{B-A} = I_B - I_A$ si $A \subseteq B$. b) $I_{A \cap B} = I_A \times I_B$

c) $I_{A \cup B} = I_A + I_B$, si A et B sont disjointes. d) $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$

2) On note F(E, {0, 1}) l'ensemble des applications de E dans {0, 1}.

Montrer que l'application : $\begin{array}{l} f : P(E) \to \mathrm{F}(\mathrm{E},\ \{0,\ 1\}) \\ A \mapsto I_A \end{array}$ est une bijection.

3) Soit $C \in P(E)$.
Montrer que $A \Delta B = A \Delta C$ si, et seulement si $B = C$. (En ne faisant que des calculs de fonctions caractéristiques.)
**Solution :**1) (a), (b), (c) Les trois réponses étant similaires, on traite intégralement la première, et laissons les autres au lecteur ou à la lectrice. Soient donc A et B deux parties de E telles que $A \subseteq B$.
On souhaite montrer que pour tout $x \in E$,

$I_{B-A}(x)=I_B(x)-I_A(x)$ Soit x ∈ E.

1er cas : x ∈ B \ A. On a alors $I_{B-A}(x)=1$.

Comme x ∈ B, on a $I_B(x)=1$ et comme x ∉ A, $I_A(x)=0$.

Ainsi, on a bien : $I_B(x)-I_A(x)=1-0=1=I_{B-A}(x)$

2nd cas : x ∉ B \ A. On a alors que $I_{B-A}(x)=0$.

De plus, il y a alors deux possibilités :
ou bien x ∉ B, ou bien x ∈ A.

Si x ∉ B, alors $I_B(x)=0$ et x ∉ A car A ⊆ B,

Donc : aussi $I_A(x)=0$.

Ainsi : $I_B(x)-I_A(x)=0-0=0=I_{B-A}(x)$

Si x ∈ A, alors aussi x ∈ B car A ⊆ B.

On aura donc $I_B(x)-I_A(x)=1-1=0=I_{B-A}(x)$ Conclusion : dans tous les cas, on a bien montré que pour tout x ∈ E, $I_{B-A}(x)=I_B(x)-I_A(x)$

C'est à dire : $I_{B-A}=I_B-I_A$

d) On utilise les questions précédentes et le fait que l'on peut décomposer A∪B en trois parties disjointes :
A ∪ B = (A \ A ∩ B) ∪ (B \ A ∩ B) ∪ A ∩ B.

2) On doit montrer que f est injective et surjective. Commençons par l'injectivité.

On doit montrer que pour toutes parties $A$ ∈ P(E) et $A'$∈ P(E) telles que $I_A=I_{A'}$ on a $A=A'$.

Soient donc $A$ ∈ P(E) et $A'$∈ P(E) telles que $I_A=I_{A'}$ Procédons par double inclusion.

Soit a ∈ $A$ . On a alors $I_A(a)=1$. Or $I_A(a)=I_B(a)=1$

Donc : a ∈ $A'$ par définition de $I_{A'}$.

Ainsi, $A\subseteq A'$. Par symétrie, on a aussi que $A'\subseteq A$. Conclusion : on a montré que pour toutes parties : $A$ ∈ P(E) et $A'$∈ P(E) telles que : $I_A=I_{A'}$ on a $A=A'$ c'est-à-dire : f est injective.

Montrons que f est surjective.
Soit g ∈ F(E, {0, 1}). Posons A = {x ∈ E | g(x) = 1} ∈ P(E).

Montrons que : g = $I_A$ = f(A).

Soit x ∈ E. Si x ∈ $A$ , alors : $I_A(x)=1=g(x)$ par définition de $A$ et de $I_A$.

Si x ∉ $A$ , alors $I_A(x)=g(x)$ ) par définition de $A$ et de $I_A$.

Conclusion : On a montré que pour tout g ∈ F(E, {0, 1}), il existe $A$ ∈ P(E) telle que g= f( $A$ )c'est-à-dire : f est surjective.

3) Soit C ∈ P(E). Montrons que A∆B = A∆C si, et seulement si : B = C.

A∆B = A∆C équivaut à : $I_{A\Delta B}=I_{A\Delta C}$

Car : $\begin{array}{l} f:P(E)\to \mathrm{F}(\mathrm{E},\ \{0,\ 1\}) \\ \qquad A\mapsto I_A \end{array}$ est injective

A∆B = A∆C équivaut à : $I_{A\Delta B}=I_{A\Delta C}$

De plus, par la question 1), on a :

$$I_{A\Delta B}=I_{(A\cup B)-(A\cap B)}=I_{A\cup B}-I_A\times I_B=I_A+I_B-2I_A\times I_B=I_A{}^2+I_B{}^2-2I_A\times I_B$$

Cette égalité vient du fait que $I_A$ et $I_B$ sont à valeurs dans {0, 1} et que $0^2=0$ et $1^1=1$.

Donc : $I_{A\Delta B}=\left(I_A-I_B\right)^2$

Ainsi, A∆B = A∆C équivaut à : $\left(I_A-I_B\right)^2=\left(I_A-I_C\right)^2$

Attention : ceci n'est équivalent à $I_A-I_B=I_A-I_C$ que si les deux côtés de cette dernière égalité sont de même signe.
En fait, c'est toujours le cas.
En effet, si x ∈ A, alors $I_A(x)=1$ et $I_A(x)-I_B(x)\geq 0$ car $I_B(x)\in$ {0, 1}, idem on a :
$I_A(x)-I_C(x)\geq 0$

Si x $\notin$ A, alors $I_A(x)=0$ et $I_A(x)-I_B(x)\leq 0$ car $I_B(x)\in$ {0, 1} et encore $I_A(x)-I_C(x)\leq 0$.

On a donc bien dans tous les cas : $I_A-I_B=I_A-I_C$ Ce qui équivaut à : $I_B=I_C$
et comme f est injective, ceci équivaut à : B = C.
**Exercice17** : Soient E et F deux ensembles.
1) Montrons que : $\mathcal{P}(E)$ ∪ $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F).
2) Montrons que : $\mathcal{P}$ (E ∩ F) = $\mathcal{P}$ (E) ∩ $\mathcal{P}$ (F).
**Solution :** 1) Montrons que
Pour montrer qu'une union est incluse dans un ensemble, il suffit de montrer que chaque terme de l'union est inclus dans l'ensemble. Montrons que $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Soit A ∈ $\mathcal{P}$ (E), montrons que A ∈ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Pour tout a ∈ A, on a que a ∈ E, et donc a ∈ E ∪ F,
Donc : A ⊆ E ∪ F ; c'est-à-dire : A ∈ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Ceci étant vrai pour tout élément A de P(E)
On a bien $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Montrons que $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Comme E et F jouent des rôles symétriques et que $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F)
On a également $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F).
Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F)
et $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F), donc $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F). Montrons qu'en général, on n'a pas :
$\mathcal{P}$ (E ∪ F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F).
Pour cela, il faut que l'on exhibe un contre-exemple à cette proposition. Prenons E = {0} et F = {1}.
On a alors E ∪ F = {0, 1} et donc : $\mathcal{P}$ (E) = {∅, {0}},
$\mathcal{P}$ (F) = {∅, {1}}, $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F) = {∅, {0}, {1}},
$\mathcal{P}$ (E ∪ F) = {∅, {0}, {1}, {0, 1}}, ce qui montre bien que dans cet exemple $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F) ≠ $\mathcal{P}$ (E ∪ F).
2) Montrons que $\mathcal{P}$ (E ∩ F) = $\mathcal{P}$ (E) ∩ $\mathcal{P}$ (F).
Pour A un ensemble, on a que A ⊆ E ∩ F
Équivaut A ⊆ E et A ⊆ F, par définition de l'intersection. Autrement dit, on a équivalence entre
A ∈ $\mathcal{P}$ (E ∩ F) et A ∈ $\mathcal{P}$ (E) ∩ $\mathcal{P}$ (F), d'où le résultat.

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*