1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P_1 : (\exists n \in \mathbb{N}); 95 \prec n^2 \prec 101$

2) $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}); |x| \leq 0$

3) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+); x + \sqrt{x} \succ 2$

4) $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$

5) $P_5 : (\exists x \in \mathbb{Q}); x^2 = 9$

6) $P_6 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}); x - y = 3$

7) $P_7 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty;1[); 3x^2 y - x + y = 0$

8) $P_8 : (\forall x \in [0;2])\left(\exists y \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right); xy - x + 2y - 1 = 0$

9) $P_9 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x \prec y^2$

10) $P_9 : (\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$

Exercice2 : Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

1) $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow$ ....

2) $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \leq 16 \Leftrightarrow$ ....

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{1}{x} \prec x \Leftrightarrow$ ....

4) $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \leq x \Leftrightarrow$ ....

Exercice3 : 1) Montrer que : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall y \in \mathbb{R}^+$: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R} / \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$

4) Montrer que : $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$ $\Rightarrow \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| \leq |x - y|$

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

6) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\forall y \in \mathbb{R}^{*+}$: $x \prec y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \prec \frac{2x+5y}{5x+2y} \prec \frac{y}{x}$

7)Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$: $(S) : \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3y - 2x = 3 \end{cases}$

8)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 1$ est un nombre impair.

9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

Exercice4 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq M$

Exercice5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $x^2 - |x-2| - 4 = 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice6 : On considère les ensembles suivants : $E=\{1;2;3;4;5;6;....;20\}$

A et B deux parties de E tel que : $A=\{x\in E\ /\ x=4k;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\{x\in E\ /\ x=3k;k\in\mathbb{N}\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$;$C_E^{A\cap B}$; $C_E^A\cup C_E^B$ et $C_E^A\cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A\cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A\cup C_E^B$

Exercice7 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E non vide.

1) Simplifier : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A$

2) Monter que : $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

3) Montrer que : $E=A\cup B$ et $A\cap C\subset B$ et $B\cap C\subset A\Rightarrow C\subset A\cap B$

Exercice8 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}\end{array}$

1) Montrer que : $f([0;1])\subset[0;2]$

2) Montrer que : $f^{-1}([-1;1])=\mathbb{R}$

Exercice9 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}:\left]0;+\infty\right[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\end{array}$

Montrer que : f est injective

Exercice10 :1) Montrer que : $\forall x\in[0;1]$; $0\le\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 1$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l}f:[0;1]\to[0;1]\\ x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

Exercice11 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

1) Montrer que pour toute partie A de E, on a :$A\subset f^{-1}(f(A))$.

2) Montrer que pour toute partie B de F, on a :$f(f^{-1}(B))\subset B$.

3) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A=f^{-1}(f(A))$.

4) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B))=B$

5) Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, on a : $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}$

Exercice12 : Soit f une application de E dans E telle que : $f\circ f\circ f=f$

Montrer que : f est injective si et seulement si f est surjective

Exercice13 : Soient E ; F ; G trois ensembles et f une application de E dans F et g une application de E dans G et soit l'application : h : $\begin{array}{l}:E\to F\times G\\ x\mapsto h(x)=(f(x);g(x))\end{array}$

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h l'est aussi.

2) On suppose que si f et g sont surjectives, h est-elle n´nécessairement surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB