http://www.xriadiat.com **DL1: S** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P_1 : (\exists n \in \mathbb{N}) ; 95 \prec n^2 \prec 101$
2) $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) ; |x| \leq 0$
3) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x + \sqrt{x} \succ 2$
4) $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; x + \frac{1}{x} \geq 2$
5) $P_5 : (\exists x \in \mathbb{Q}) ; x^2 = 9$
6) $P_6 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) ; x - y = 3$
7) $P_7 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty ; 1[) ; 3x^2 y - x + y = 0$
8) $P_8 : (\forall x \in [0;2])\left(\exists y \in \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]\right) ; xy - x + 2y - 1 = 0$
9) $P_9 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) ; x \prec y^2$
10) $P_9 : (\exists ! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$

Solution : 1) La proposition P_1 : est vraie

(Par exemple 10 ; $(\exists n = 10 \in \mathbb{N}) ; 95 \prec n^2 \prec 101$):

2) La proposition P_2 : est vraie, il suffit de prendre :

$x = 0$ et on trouve $|0| \leq 0$

3) On a $0 \in \mathbb{R}^+$ mais $0 + \sqrt{0} \leq 2$, alors la proposition P_3 : est fausse.

4) On a : $-1 \in \mathbb{R}^*$ mais : $-1 + \frac{1}{-1} = -2 \prec 2$ alors la proposition P_4 : est fausse.

5) Puisque les solutions de liquation $x^2 = 9$ sont : -3 *et* 3

Alors la proposition P_5 : est vraie.

6) Soit $x \in \mathbb{Z}$ existe-t-il y dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x - y = 3$?

On a : $x - y = 3 \Leftrightarrow y = x - 3 \in \mathbb{Z}$

Donc : la proposition P_6 : est vraie.

7) Soit $x \in \mathbb{R}$; existe-t-il y dans $]-\infty ; 1[$ tel que : $3x^2 y - x + y = 0$?

$$3x^2 y - x + y = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 + 1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{3x^2 + 1}$$

Il reste à montrer que : $y \in]-\infty ; 1[$

$$y - 1 = \frac{x}{3x^2 + 1} - 1 = \frac{x - 3x^2 - 1}{3x^2 + 1} = -\frac{3x^2 - x + 1}{3x^2 + 1}$$

On a : $3x^2 - x + 1 \succ 0$ car $\Delta = -11 \prec 0$ et $a = 3 \succ 0$ et on a : $3x^2 + 1 \succ 0$

Donc : $y - 1 \prec 0$ c'est-a-dire : $y \prec 1$

Par suite : la proposition P_7 : est vraie.

8) Soit $x \in [0;2]$; existe-t-il y dans $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$ tel que : $xy - x + 2y - 1 = 0$?

$xy-x+2y-1=0 \Leftrightarrow xy+2y=1+x \Leftrightarrow y(x+2)=1+x \Leftrightarrow y=\dfrac{1+x}{x+2}=1-\dfrac{1}{x+2}$

Il reste à montrer que : $y\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right]$Comme : $0\le x\le 2$ alors : $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{x+2}\le\dfrac{1}{2}$ donc : $1-\dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{x+2}\le 1-\dfrac{1}{4}$

D'où : $y\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right]$

Par suite : la proposition P_8 :est vraie.

9) $P_9:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x\prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-1$ et on trouve :$(\forall y\in\mathbb{R});-1\prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_9 :est vraie.

10) $P_9:(\exists! x\in[-1;0])(\exists y\in\mathbb{R}):x^2y+4xy+1=0$

Si on prend : $y=1$: on retrouve la proposition :$(\exists! x\in[-1;0]):x^2+4x+1=0$?

$\Delta=16-4=12\succ 0$: $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}\approx -0,26\in[-1;0]$ et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{12}}{2}=-2-\sqrt{3}\notin[-1;0]$

Par suite : $(\exists! x\in[-1;0]):x^2+4x+1=0$ est vraie

Conclusion : $P_9:(\exists! x\in[-1;0])(\exists y\in\mathbb{R}):x^2y+4xy+1=0$ est vraie

Exercice2 : Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

1) $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\sqrt{x}>2\Leftrightarrow$ ....

2) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\le 16\Leftrightarrow$ ....

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{1}{x}\prec x\Leftrightarrow$ ....

4) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\le x\Leftrightarrow$ ....

Solution :1) $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\sqrt{x}>2\Leftrightarrow\sqrt{x}^2>2^2\Leftrightarrow x>4\Leftrightarrow x\in]4;+\infty[$

2) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\le 16\Leftrightarrow\sqrt{x^2}\le\sqrt{16}\Leftrightarrow|x|\le 4\Leftrightarrow -4\le x\le 4\Leftrightarrow x\in[-4;4]$

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{1}{x}\prec x\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}\succ 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{x}\succ 0\Leftrightarrow x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$

Remarque : On utilise le tableau de signe pour trouver les solutions des inéquations

4) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\le x\Leftrightarrow x^2-x\le 0\Leftrightarrow x(x-1)\le 0\Leftrightarrow x\in[0;1]$

Exercice3 : 1) Montrer que :$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ et $\forall y\in\mathbb{R}^+$: $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ / $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Leftrightarrow x+y=0$

4) Montrer que : $x\in[0;1]$ et $y\in[0;1]$ $\Rightarrow\left|\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+y}\right|\le|x-y|$

5) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$: $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

6) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\forall y\in\mathbb{R}^{*+}$: $x\prec y\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}\prec\dfrac{2x+5y}{5x+2y}\prec\dfrac{y}{x}$

7)Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$: (S): $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3y-2x=3 \end{cases}$

8)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : n^2+n+1$ est un nombre impair.

9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

Solution : 1) Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication :

$\Rightarrow$) Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ Supposons : $a^2+b^2=0 \Rightarrow a^2=-b^2 \Rightarrow a^2\in\mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$
Donc $a^2=0$ par suite : $a=0$
Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

$\Leftarrow$) Supposons : $a=0$ et $b=0$ alors : $0^2+0^2=0$

Par suite : :$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Soit $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$: $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y} \Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0 \Rightarrow \sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$ (d'apres1)$\Rightarrow \sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1 \Rightarrow x=1$ et $y=1$

3) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow x+y=0$

Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication :Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$) Supposons : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ et Montrons que : $x+y=0$

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Rightarrow \Rightarrow \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

$\Rightarrow\left(x^2-x^2-1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow -y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}$ ①

On a : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ alors :$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

Par suite : $-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$

D'où : $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$ ②

D'après : ① et ② on a : $\begin{cases} x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \\ x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Alors : $2(x+y)=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Alors : $2(x+y)=0$ c'est-à-dire : $x+y=0$
D'où : : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Rightarrow x+y=0$

$\Leftarrow$) Supposons : $x+y=0$ et Montrons que : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ On a : $x+y=0 \Rightarrow y=-x$

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$

$$=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = -\left(x^2-x^2-1\right)=1$$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $x+y=0 \Rightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow x+y=0$

4) Montrons que : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|$

Soient : $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$;

$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}=\frac{1+y-1-x}{(1+x)(1+y)}=\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$

Donc on obtient : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=\left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right|=\frac{|y-x|}{|(1+x)(1+y)|}$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=|x-y| \times \frac{1}{|(1+x)(1+y)|}$ car $|y-x|=|x-y|$

On a : $1 \leq x+1 \leq 2$ et $1 \leq y+1 \leq 2$ donc $(1+x)(1+y)>0$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=|x-y| \times \frac{1}{(1+x)(1+y)}$

On a aussi : $1 \leq x+1 \leq 2$ et $1 \leq y+1 \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y+1} \leq 1$

Donc : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+x)(1+y)} \leq 1$ et puisque : $0 \leq |x-y|$

Alors : $\frac{|x-y|}{4} \leq |x-y| \frac{1}{(1+x)(1+y)} \leq |x-y|$

Ce qui entraine que : $\frac{|x-y|}{4} \leq \left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|$

5) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$; On a : $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 2x+2=1+2\sqrt{x}+x \Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1=4x$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$

6) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall y \in \mathbb{R}^+$

$x \prec y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \prec \frac{2x+5y}{5x+2y} \prec \frac{y}{x}$

Soit $(x;y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

$\frac{x}{y} \prec \frac{2x+5y}{5x+2y} \prec \frac{y}{x} \overset{\times xy}{\Leftrightarrow} \frac{x}{y} \times xy \prec \frac{2x+5y}{5x+2y} \times xy \prec \frac{y}{x} \times xy \Leftrightarrow x^2 \prec \frac{2x+5y}{5x+2y} \times xy \prec y^2$

$\Leftrightarrow x^2(5x+2y) \prec (2x+5y) \times xy \prec y^2(5x+2y)$

$\Leftrightarrow 5x^3 + 2yx^2 \prec 2x^2y + 5xy^2 \prec 5xy^2 + 2y^3$

$\Leftrightarrow 5x^3 + 2yx^2 \prec 2x^2y + 5xy^2 \quad et \quad 2x^2y + 5xy^2 \prec 5xy^2 + 2y^3$

$\Leftrightarrow 5x^3 \prec 5xy^2 \quad et \quad 2x^2y \prec 2y^3$

$\Leftrightarrow x^2 \prec y^2 \quad et \quad x^2 \prec y^2 \quad \Leftrightarrow x^2 \prec y^2 \quad \Leftrightarrow x \prec y$

7) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution

dans $\mathbb{R}^2$: Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} 2x-3y=3 & (1) \\ 3y-2x=3 & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 0=6$

Ce qui est contradictoire par suite : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$

8)Raisonnement par disjonction des cas : Soit : $n\in\mathbb{N}$.

<u>Premier cas :</u> si n est pair : $\exists k\in\mathbb{N} : n=2k$

$n^2+n+1=(2k)^2+2k+1=4k^2+2k+1=2(2k^2+k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

<u>2 iem cas :</u> si n est impair : $\exists k\in\mathbb{N} : n=2k+1$

$n^2+n+1=(2k+1)^2+2k+1+1=4k^2+4k+1+2k+1+1=2(2k^2+3k+1)+1=2k'+1$

avec $k'=2k^2+3k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall n\in\mathbb{N} : n^2+n+1$ est un nombre impair.

9) Notons P(n) La proposition : "$\sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : "$\sum_{p=1}^{1} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = 1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}$" et

"$\frac{4\times5^{1+1}-(5+1)4^{1+1}}{5^1} = \frac{100-96}{5^1} = \frac{4}{5}$" Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}$;

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : "$\sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$"

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : "$\sum_{p=1}^{n+1} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4\times5^{n+2}-(6+n)4^{n+1}}{5^{n+1}}$" ??

On a : $\sum_{p=1}^{n+1} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{4}{5}\right)^p + (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence :

"$\sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$"

Donc : $\sum_{p=1}^{n+1} p\left(\frac{4}{5}\right)^p = \frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n} + (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = \frac{4\times5^{n+2}-5(5+n)4^{n+1}+(n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}}$

$$=\frac{4\times5^{n+2}+\left(-25-5n+n+1\right)4^{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{4\times5^{n+2}-\left(24+4n\right)4^{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{4\times5^{n+2}-\left(6+n\right)4^{n+2}}{5^{n+1}}$$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times5^{n+1}-\left(5+n\right)4^{n+1}}{5^n}$.

Exercice4 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Solution : Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\le M$

$f(x)\le M \Rightarrow x^2+2x\le M\Rightarrow x^2+2x+1\le M+1$

$\Rightarrow (x+1)^2\le M+1\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\le\sqrt{M+1}\Rightarrow |x+1|\le\sqrt{M+1}\Rightarrow -\sqrt{M+1}\le x+1\le\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\le x\le\sqrt{M+1}-1\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Exercice5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $x^2-|x-2|-4=0$

Solution : $(E): x^2-|x-2|-4=0$: Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x\ge2$ alors $x-2\ge0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ C'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt9}{2\times1}=-1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt9}{2\times1}=2$ Mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec 2$ alors : $x-2\le0$ donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$ c'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$: donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=-3$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=2$

Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$ donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

Exercice6 : On considère les ensembles suivants : $E=\{1;2;3;4;5;6;....;20\}$

A et B deux parties de E tel que : $A=\{x\in E\ /\ x=4k;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\{x\in E\ /\ x=3k;k\in\mathbb{N}\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$; $C_E^{A\cap B}$; $C_E^A\cup C_E^B$ et $C_E^A\cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A\cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A\cup C_E^B$

Solution : 1) $A=\{4;8;12;16;20\}$ et $B=\{3;6;9;12;15;18\}$

2) $C_E^A=\{x\in E\ /\ x\notin A\}$

$C_E^A=\{1;2;3;5;6;7;9;10;11;13;14;15;17;18;19\}$

$C_E^B=\{x\in E\ /\ x\notin B\}$

$C_E^B=\{1;2;4;5;7;8;10;11;13;14;16;17;19;20\}$

$A\cap B=\{12\}$

$A\cup B=\{3;4;6;8;9;12;15;16;18;20\}$

$C_E^{A\cup B}=\{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^{A\cap B}=E-\{12\}=\{1;2;3;4;11;13....;20\}$

$C_E^A\cap C_E^B=\{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^A\cup C_E^B=\{1;2;3;4;11;13....;20\}$

3) On remarque que :

a) $C_E^{A\cup B}=C_E^A\cap C_E^B$ b) $C_E^{A\cap B}=C_E^A\cup C_E^B$

Exercice7 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E non vide.

1) Simplifier : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup \mathrm{A}$

2) Monter que : $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

3) Montrer que : $E=A\cup B$ et $A\cap C\subset B$ et $B\cap C\subset A\Rightarrow C\subset A\cap B$

Solution: 1) $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup \mathrm{A}=\left(\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}\right)\right)\cup \mathrm{A}$

$=\left(\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup C\right)\right)\cup \mathrm{A}=\left(\overline{A}\cup\left(B\cap C\right)\right)\cup \mathrm{A}=\left(\overline{A}\cup \mathrm{A}\right)\cup\left(B\cap C\right)=E\cup\left(B\cap C\right)=E$

2)Démontrons la double implication.

$\Rightarrow$) Evident. Car : si $A=B$

Alors : $A\cap A=A\cup A=A$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A\cap B=A\cup B$

et on montre que : $A=B$

✓ Soit $x\in A$ montrons que $x\in B$?

$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap B$

C'est-à-dire : $x\in B$: Ceci signifie que : $A\subset B$ 1

✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in A$?

$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap B$

C'est-à-dire : $x \in A$: Ceci signifie que : $B \subset A$ ②
D'après ① et ② on en déduit que : $A = B$
Conclusion : $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3)Soit $x \in C$ montrons que $x \in A \cap B$?
Si $x \notin A$ comme : $E = A \cup B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cap C$
$\Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ on aboutit à une contradiction
Donc : $x \in A$ (1) et comme : $x \in C$
Alors : $x \in A \cap C$ et puisque : $A \cap C \subset B$
Alors : $x \in B\,(2)$
D'après ① et ② on en déduit que : $x \in A \cap B$
Conclusion : $C \subset A \cap B$

Exercice8 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

1) Montrer que : $f([0;1]) \subset [0;2]$

2) Montrer que : $f^{-1}([-1;1]) = \mathbb{R}$

Solution : 1) Calculons : $f([0;1])$

$x \in [0;1] \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x^2+1 \le 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{x^2+1} \le 1$ et $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \le 2x \le 2$

$x \in [0;1] \Rightarrow 0 \le \dfrac{2x}{x^2+1} \le 2 \Rightarrow 0 \le f(x) \le 2$

Donc : $f([0;1]) \subset [0;2]$

2) $x \in f^{-1}([-1;1]) \Leftrightarrow f(x) \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow |f(x)| \le 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{|2x|}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow |2x| \le x^2+1$

$\Leftrightarrow 0 \le |x|^2 - 2|x| + 1 \Leftrightarrow 0 \le (|x|-1)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}([-1;1]) = \mathbb{R}$

Exercice9 : Soit f l'application : $\begin{array}{l} :]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \end{array}$

Montrer que : f est injective

Solution : Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in]0;+\infty[$ et $x_2 \in]0;+\infty[$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $f(x_1) = f(x_2)$

Donc : $\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2+1}\right)\left(\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1}\right)}{\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1}} + \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+1-x_2-1}{\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1}} + \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right) = 0$$

Or $\frac{1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\succ 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\neq 0$

Donc : $\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2+1}+\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$

Par suite : f est injective

Exercice10 :1) Montrer que : $\forall x\in[0;1]$; $0\leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1$

2)Soit l'application : $f:[0;1]\to[0;1]$, $x\mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in[0;1]$; $0\leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1$

Soit : $x\in[0;1]$; On a : $0\leq x\leq 1\Rightarrow 0\leq \sqrt{x}\leq 1$ *et* $0\leq\sqrt{1-x}\leq 1$

Donc : $0\leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ (1)

Montrons que : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}-1=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}=\frac{-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 0$$

Donc : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1$

D'où d'après (1) et (2) on en déduit que : $0\leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1$

2)Soit l'application : $f:[0;1]\to[0;1]$, $x\mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

Montrons que f est une bijection et déterminons sa bijection réciproque.

Soit $y\in[0;1]$; Résolvons dans : $[0;1]$; l'équation : $f(x)=y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}=y\Leftrightarrow \sqrt{x}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\times y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1-y)=y\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}(1-y)\right)^2=\left(y\sqrt{1-x}\right)^2\Leftrightarrow x(1-y)^2=y^2(1-x)\Leftrightarrow x(1-y)^2+xy^2=y^2$$

$$\Leftrightarrow x\left((1-y)^2+y^2\right)=y^2\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{(1-y)^2+y^2}=\frac{y^2}{2y^2-2y+1}$$ Comme : $\frac{y^2}{2y^2-2y+1}\in[0;1]$

Ceci signifie que l'application f est bijective.

Sa réciproque est l'application f^{-1}définie par : $f^{-1}:[0;1]\to[0;1]$, $x\mapsto\frac{x^2}{2x^2-2x+1}$

Exercice11 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
1) Montrer que pour toute partie A de E, on a :$A \subset f^{-1}(f(A))$.
2) Montrer que pour toute partie B de F, on a :$f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$
5) Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, on a : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Solution :1) Pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$,
Ce qui montre que $A \subset f^{-1}(f(A))$
2) Pour tout $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, comme $x \in f^{-1}(B)$ $f(x) \in B$
Ce qui entraine que $y \in B$
Ce qui montre que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3) Comme « pour toute partie A de E,
On a $A \subset f^{-1}(f(A))$ » la question revient à montrer que :
« f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A \supset f^{-1}(f(A))$ »
Si f est injective. Pour tout $x \in f^{-1}(f(A))$, $f(x) \in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x' \in A$
(Attention, à priori ce n'est pas le même x que celui du début de la phrase) tel que $f(x) = f(x')$
comme f est injective :$x = x'$, par conséquent $x \in A$.
On a montré que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$
$f(x_1) = f(x_2) = y$
On prend $A = \{x_1\}$: $f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\}$
$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$
D'après l'hypothèse $f^{-1}(f(A)) \subset A$
Donc $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$ Or $x_2 \in f^{-1}(y)$ car $f(x_2) = y$
Donc $x_2 \in \{x_1\}$ par conséquent $x_1 = x_2$ ce qui signifie que f est injective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée.
4) Comme « pour toute partie B de F, on a :
$f(f^{-1}(B)) \subset B$ » la question revient à montrer que :
« f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a : $f(f^{-1}(B)) \supset B$ »
Si f est surjective.
Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
$x \in f^{-1}(B)$ entraine que : $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$,
Cela montre que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Si pour tout $B \subset f(f^{-1}(B))$ On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$
ce qui s'écrit aussi $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$,
il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$,
Cela montre bien que f est surjective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée
6)Supposons que f est bijective et Montrons que : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Soit : $y \in f(\overline{A}) \Rightarrow \exists x \in \overline{A}$ tel que $y \in f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in E$ et $x \notin A$ tel que $y \in f(x)$ Or $x \notin A$ alors : $f(x) \notin f(A)$ car

Si $f(x) \in f(A)$ alors :$\exists a \in A$ tel que $y \in f(a)$

Donc : $f(a) = f(x)$ et donc : $a = x$ car f injective

Donc : absurde

Donc : $f(x) \notin f(A) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$

Par suite : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Inversement : Soit : $y \in \overline{f(A)} \Rightarrow y \notin f(A)$ et $y \in F$

Or $y \in F$ et f surjective alors : $\exists x \in E \ y = f(x)$

$\Rightarrow f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) = y \in f(\overline{A})$

Par suite : $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$

Donc : si f est bijective alors : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

$\Leftarrow$) si $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ montrons que f est bijective

- Montrons que f est surjective

Il suffit démontrer que : $f(E) = F$

Si : $A = \varnothing$. $\Rightarrow f(\overline{\varnothing}) = \overline{f(\varnothing)} \Rightarrow f(E) = \overline{\varnothing} = E$

Donc : f est surjective

- Montrons que f est injective

Il suffit de montrer que : $f^{-1}(f(A)) = A$

On a : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow \overline{f(\overline{A})} = f(A) \Rightarrow f^{-1}\left(\overline{f(\overline{A})}\right) = f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f^{-1}\left(\overline{f(\overline{A})}\right) \Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$

Exercice12 : Soit f une application de E dans E telle que : $f \circ f \circ f = f$

Montrer que : f est injective si et seulement si f est surjective

Solution : $\Rightarrow$) On suppose que : f est injective et montrons que : f est surjective ???

Soit $y \in E$; On a : $f \circ f \circ f = f$ donc ; $(f \circ f \circ f)(y) = f(y)$

Donc : $f((f \circ f)(y)) = f(y)$

Puisque : f est injective alors : $(f \circ f)(y) = y$

Donc : $f(f(y)) = y$

Donc :il existe $x \in E$; $f(x) = y$

Il suffit de prendre : $x = f(y)$

Donc : f est surjective

$\Rightarrow$) On suppose que : f est surjective et montrons que : f est injective ???

Soient $x \in E \ et \ x' \in E$ tels que : $f(x) = f(x')$

Comme : f est surjective il existe $t \in E \ et \ t' \in E \ \ f(t) = x$ et $f(t') = x'$

$f(x) = f(x') \Rightarrow f(f(t)) = f(f(t')) \Rightarrow (f \circ f)(t) = (f \circ f)(t') \Rightarrow f((f \circ f)(t)) = f((f \circ f)(t'))$

$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(t) = (f \circ f \circ f)(t') \Rightarrow (f \circ f \circ f)(t) = (f \circ f \circ f)(t')$

Comme : $f \circ f \circ f = f \Rightarrow f(t) = f(t') \Rightarrow x = x'$

Donc : f est injective

Donc : on a prouvé que si f est injective ou surjective alors f est bijective

En composant la relation $f \circ f \circ f = f$: par f^{-1}

On obtient : $f \circ f \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$

C'est-à-dire : $\boxed{f \circ f = Id_E}$ car $f \circ f^{-1} = Id_E$

Exercice13 : Soient E ; F ; G trois ensembles et f une application de E dans F et g une application de E dans G et soit l'application : h : $\begin{array}{l} : E \to F \times G \\ x \mapsto h(x) = (f(x); g(x)) \end{array}$

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h l'est aussi.

2) On suppose que si f et g sont surjectives, h est-elle n´nécessairement surjective ?

Solution : 1) On suppose par exemple que : f est injective

Soient $x_1 \in E; x_2 \in E$ et $x_2 \in [0;1]$

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (f(x_1); g(x_1)) = (f(x_2); g(x_2))$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \\ g(x_1) = g(x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$

2) Si f et g sont surjectives, h n'est pas n´nécessairement surjective

Contre-exemple : Soit E un ensemble contenant 2 éléments a et b : $E = \{a; b\}$ et considérant :

$E = F = G$ et $f = g = Id_E$ surjectives (évident).

On aura alors : $\forall x \in E = \{a; b\}$:

$h(x) = (f(x); g(x)) = (Id_E(x); Id_E(x)) = (x; x)$

On a : $(a; b) \in E \times E$ mais il n'existe pas d'élément $x \in E$ qui vérifie : $h(x) = (a; b)$

Donc h n'est pas nécessairement surjective.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien