http://www.xriadiat.com **DL1: R** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : 1) Démontrer par l'absurde que la proposition suivante est fausse :

(P): "$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$"

2) Démontrer en utilisant un contre-exemple que la proposition suivante est fausse :

Q : « $\forall x\in\mathbb{R}_+^*;x^2>x$

3) Démontrer en utilisant des équivalences successives que la proposition suivante est vraie :

R: « $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^+)^2;9x+4y\geq 12\sqrt{xy}$

4) Démontrer en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

S: « $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(y\neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y}\neq 7\right)$

5)Montrer par équivalence que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1$

6)Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}:\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$

7) Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que :

Le nombre : $4^{2n}-3^{2n}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n

Exercice2 : 1) Démontrer que :

1) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;(x\succ 2 \text{ et } y\succ 2\Rightarrow xy\succ x+y)$ 2) $\forall x\succ 2 \text{ et } \forall y\succ 2$: $\left(x\neq y\Rightarrow x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1}\right)$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*:\sqrt{n^2+n}\notin\mathbb{N}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{x\in\mathbb{Z}/k^2\leq 7\}$ $E_2=\{k\in\mathbb{Z}/7\leq k^2\leq 35\}$

$E_3=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$ $E_4=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\leq 7\}$

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\right\}$

Exercice4 : $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\left|1-\frac{x}{2}\right|\prec 1\right\}$ et $B=]0;4[$; Montrons que : $A=B$

Exercice5 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E=\{a;b;c;d;e\}$ telles que :

$A\cup B=\{b;c;d;e\}$; $A\cap B=\{b;d\}$; $A\cap C=\{b;c\}$ et $A\cup C=\{a;b;c;d\}$

1) Déterminer : A ; B ; C

2) Déterminer : $A\cup(B\cap C)$; $A\cap(B\cup C)$; $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A\cap B}$

3) Déterminer : $A\Delta B$; $B\Delta C$; $C\Delta A$ et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice6 : Soit l'ensemble : $F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y \text{ et } y^2\le x\right\}$

1) Vérifier que : $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $F\subset[0;1]\times[0;1]$

Exercice7 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x-|x|+3 \end{array}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Exercice8 : Soit l'application $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Telle que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

1) Montrer que : $f(0)=0$

2) Montrer que : $f(1)=0$ ou $f(1)=1$

3) On suppose que : $f(1)\neq 0$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $f(n)=n$

b) Montrer que : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$

d) Montrer que : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Exercice9 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2\end{array}$

2) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto x^2\end{array}$

3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2] \\ x\mapsto x^2\end{array}$

Exercice10 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset]-1,1[$

b) f est-elle surjective ?

c) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}(\{3\})$

2) Montrer que : $f^{-1}\left(\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right)=[0,1]$

3) Montrer que f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice11 : Soit l'application $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto(x+y\ ;\ xy)\end{array}$

1) a) f est-elle injective ?

b) f est-elle surjective ?

2) Soient les ensembles : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x\le y\right\}$ et $F=\left\{(s;p)\in\mathbb{R}^2 / s^2-4p\ge 0\right\}$

Montrer que : $f(E)=F$

3) Soit g la restriction de f sur E

Montrer que g : est une bijection de E vers F et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB