http://www.xriadiat.com **DL1: R** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : 1) Démontrer par l'absurde que la proposition suivante est fausse :

(P): "$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$"

2) Démontrer en utilisant un contre-exemple que la proposition suivante est fausse :

Q : « $\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*};x^{2}>x$

3) Démontrer en utilisant des équivalences successives que la proposition suivante est vraie :

R: « $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{+})^{2};9x+4y\geq12\sqrt{xy}$

4) Démontrer en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

S: « $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{2};\left(y\neq-\frac{3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\neq7\right)$

5)Montrer par équivalence que : $\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$; $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1$

6)Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}:\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$

7) Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que :

Le nombre : $4^{2n}-3^{2n}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n

Solution :1) Supposons par l'absurde que : $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$ est vraie

$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{2}<\left(2\sqrt{2}\right)^{2}\Rightarrow\left(\sqrt{3}\right)^{2}+\left(\sqrt{5}\right)^{2}+2\sqrt{3}\times\sqrt{5}<8$

$\Rightarrow3+5+2\sqrt{3}\times\sqrt{5}<8\Rightarrow2\sqrt{15}<0$ Contradiction

Pa suite : la proposition : (P) : "$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$" est fausse

2) Q : « $\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*};x^{2}>x$ donc : $\overline{Q}$: « $\exists x\in\mathbb{R}_{+}^{*};x^{2}\leq x$

Pour $x=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ nous avons : $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2}$

$\overline{Q}$: est vraie par suite : Q : est fausse

3) Démontrons en utilisant des équivalences successives que la proposition suivante est vraie :

R: « $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{+})^{2};9x+4y\geq12\sqrt{xy}$

Soit : $(x;y)\in(\mathbb{R}^{+})^{2}$

$9x+4y\geq12\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(3\sqrt{x}\right)^{2}+\left(2\sqrt{y}\right)^{2}-2\times3\sqrt{x}\times2\sqrt{y}\geq0\Leftrightarrow\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^{2}\geq0$ Proposition vraie

Par suite : R: « $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{+})^{2};9x+4y\geq12\sqrt{xy}$ est une Proposition vraie

4) Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

S : « $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(y\neq-\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y}\neq 7\right)$

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$; Par contraposée Montrons que : $\left(\frac{x-y}{x+y}=7\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x\right)$

$$\frac{x-y}{x+y}=7\Rightarrow x-y=7(x+y)\Rightarrow x-y=7x+7y\Rightarrow -y-7y=7x-x\Rightarrow -8y=6x\Rightarrow y=\frac{6}{-8}x\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$$

Par contraposée on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(y\neq-\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y}\neq 7\right)$

5)Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1\Leftrightarrow\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}\right)^2>1^2\Leftrightarrow(2x+1)^2>4x(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1>4x^2+4x\Leftrightarrow 1>0$

Et puisque on a : $1>0$ est une proposition vraie

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}>1$

6)Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6}=m$

$\frac{4n+3}{6}=m\Leftrightarrow 4n+3=6m\Rightarrow 3=6m-4n\Rightarrow 3=2(3m-2n)\Rightarrow 3=2k$ avec $k=3m-2\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 3$ est pair !. C'est une contradiction car on sait que : 3 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$

Autre procédure : $3=2(3m-2n)\Rightarrow 3=2k\Rightarrow$ 2 divise 3

$\Rightarrow$ Absurde car on sait que : 2 ne divise pas 3

7) Montrons que : $4^{2n}-3^{2n}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4^{3n}-4^n=4^0-4^0=1-1=0$ et 0 est divisible par 5

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}$ / $4^{3n}-4^n=5k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}$ / $4^{3n+3}-4^{n+1}=5k'$??

$$4^{3n+3}-4^{n+1}=4^3\times4^{3n}-4^1\times4^n=65\times4^{3n}-4\times4^n=(65-1)\times4^{3n}-(5-1)\times4^n=5\times13\times4^{3n}-4^{3n}-5\times4^n+4^n$$

$$=5\times13\times4^{3n}-5\times4^n-\left(4^{3n}-4^n\right)=5\times13\times4^{3n}-5\times4^n-5k=5\times\left(13\times4^{3n}-4^n-k\right)=5\times k'$$

avec $k'=13\times4^{3n}-4^n-k\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : : $\forall n\in\mathbb{N}$ $4^{3n}-4^n$ est divisible par 5

Exercice2 : 1) Démontrer que :

1) $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2;(x\succ 2\ et\ \ y\succ 2\Rightarrow xy\succ x+y\ )$

2) $\forall x\succ 2\ et\ \ \forall y\succ 2\ \ :\left(\ x\neq y\Rightarrow x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1}\ \right)$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*:\sqrt{n^2+n}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$; Supposons que : $x\succ 2\ et\ \ y\succ 2$ et montrons que : $xy\succ x+y$

$x\succ 2\ et\ \ y\succ 2\Rightarrow x-1\succ 1\ et\ \ y-1\succ 1\Rightarrow (x-1)(y-1)\succ 1\Rightarrow xy-x-y+1\succ 1\Rightarrow xy\succ x+y$

Donc : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2;(x\succ 2\ et\ \ y\succ 2\Rightarrow xy\succ x+y\ )$

2)Démontrons en utilisant le Raisonnement par contraposée que :

$\forall x\succ 2\ et\ \ \forall y\succ 2\ \ :\left(\ x\neq y\Rightarrow x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1}\ \right)$

Soient : $x\succ 2\ et\ \ y\succ 2$; Par contraposée

Montrons que : $x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1}\Rightarrow x=y$

$x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(x\sqrt{y-1}\right)^2=\left(y\sqrt{x-1}\right)^2\ \ \Rightarrow x^2(y-1)=y^2(x-1)\ \ \Rightarrow x^2y-x^2=y^2x-y^2$

$\Rightarrow x^2y-y^2x+y^2-x^2=0\ \Rightarrow xy(x-y)-(x-y)(x+y)=0$

$\Rightarrow (x-y)\big(xy-(x+y)\big)=0\ \Rightarrow x-y=0\ ou\ xy-(x+y)=0\ \Rightarrow x-y=0\ ou\ xy=x+y$

D'après 1) $(x\succ 2\ et\ \ y\succ 2\Rightarrow xy\succ x+y\ )$ donc : $xy\succ x+y$ par suite : $xy\neq x+y$

Par conséquent : $x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1}\ \Rightarrow x-y=0$

3)Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\sqrt{n^2+n}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+n}=m$

$\sqrt{n^2+n}=m\Leftrightarrow n^2+n=m^2\ \Rightarrow\boxed{n^2<m^2}$ car $m^2-n^2=n\succ 0\ :\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$n^2+n=m^2\Rightarrow m^2\prec n^2+2n+1$ car : $n^2+2n+1-m^2=n^2+2n+1-\left(n^2+n\right)=n+1\succ 0$

Donc : $\boxed{m^2<(n+1)^2}$ et et comme : $\boxed{n^2<m^2}$

On a alors : $n^2<m^2<(n+1)^2$ c'est-à-dire : $n<m<n+1$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n\ \ et\ \ n+1$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\sqrt{n^2+n}\notin\mathbb{N}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{x\in\mathbb{Z}/k^2\leq 7\}$

$E_2=\{k\in\mathbb{Z}/7\leq k^2\leq 35\}$

$E_3=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\leq 7\}$

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\right\}$

Solution : $k \in E_1 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ et $k^2 \leq 7$

$\Leftrightarrow |k| \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq k \leq \sqrt{7}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $E_1 = \{-2;-1;0;1;2\}$

$k \in E_2 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ et $7 \leq k^2 \leq 35 \Leftrightarrow \sqrt{7} \leq |k| \leq \sqrt{35} \Leftrightarrow |k| \in \{3;4;5\} \Leftrightarrow k \in \{-5;-4;-3;3;4;5\}$ Donc :

$E_2 = \{-5;-4;-3;3;4;5\}$ ..

$E_3 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$?

Et $(x-y)+(x+y) = 2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité et $x+y \geq x-y$ $\quad 32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$E_3 = \{(6;2);(9;7)\}$

$E_4 = \{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 \prec 2xy \leq 7\}$?

Soit : $(x;y) \in E_4$ donc : $0 \prec 2xy \leq 7$ donc : $2xy$ est u nombre relatif pair inferieur a 7

Donc : $(x;y) \in E_4 \Leftrightarrow 2xy = 2$ ou $2xy = 4$ ou $2xy = 6$

$(x;y) \in E_4 \Leftrightarrow xy = 1$ ou $xy = 2$ ou $xy = 3$

Donc : $E_4 = \{(-1;-1);(1;1);(1;2);(-1;-2);(2;1);(-2;-1);\ (1;3);(-1;-3);(3;1);(-3;-1)\}$ ..

$E_5 = \left\{x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1}\right\}$?

Soit : $x \in E_5$ donc : $x \in \mathbb{Z}^*$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1}$

Alors $x \in \mathbb{N}^*$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) x \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \prec 2 \Rightarrow x \prec 2$

Alors $E_5 \subset \{1\}$

Inversement : $\{1\} \subset E_5$ car : $1 \in E_5$

En effet : $1 \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{1} = 1 \geq \frac{n}{n+1}$

Conclusion : $E_5 = \{1\}$

Exercice4 : $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \left|1 - \frac{x}{2}\right| \prec 1\right\}$ et $B =]0;4[$

Montrons que : $A = B$

Solution : Conseils méthodologiques : Pour montrer que $A = B$, on montre que :

a) $A \subset B$ et que $B \subset A$.

b) ou bien on montre que : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\left|1 - \frac{x}{2}\right| \prec 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-1 \prec 1 - \frac{x}{2} \prec 1$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $-2\prec -\frac{x}{2}\prec 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $0\prec x\prec 4 \Leftrightarrow x\in B=\left]0;4\right[$

Donc on a : $x\in A \Leftrightarrow x\in B$

Donc : $A=B$

Exercice5 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E=\{a;b;c;d;e\}$ telles que :

$A\cup B=\{b;c;d;e\}$; $A\cap B=\{b;d\}$; $A\cap C=\{b;c\}$ et $A\cup C=\{a;b;c;d\}$

1) Déterminer : A ; B ; C

2) Déterminer : $A\cup(B\cap C)$; $A\cap(B\cup C)$; $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A\cap B}$

3) Déterminer : $A\Delta B$; $B\Delta C$ et $C\Delta A$

Et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Solution :1) $A=\{b;c;d\}$; $B=\{b;d;e\}$; $C=\{a;b;c\}$

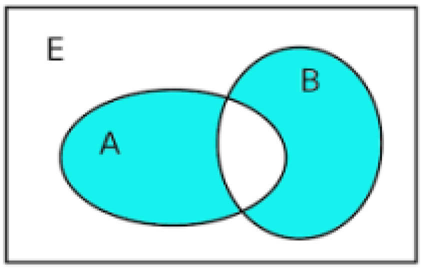
2) $B\cap C=\{b\}$ et $A\cup(B\cap C)=\{b;c;d\}$

$A\cap(B\cup C)=\{b;c;d\}$;

$\overline{A\cup B}=\{a\}$; $\overline{A\cap B}=\{a;c;e\}$

3) $A\Delta B= =(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$A\Delta B=\{c;e\}$ et $B\Delta C=\{a;c;d;e\}$



$C\Delta A=\{a;d\}$

$(A\Delta B)\Delta C=\{c;e\}\Delta\{a;b;c\}=\{a;b;e\}$

$A\Delta(B\Delta C)=\{b;c;d\}\Delta\{a;c;d;e\}=\{a;b;e\}$

Donc : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Exercice6 : Soit l'ensemble : $F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y \ et \ y^2\le x \}$

1) Vérifier que : $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $F\subset[0;1]\times[0;1]$

Solution : 1) On a : $0^2\le 0 \ et \ 0^2\le 0$

Donc : $(0;0)\in F$ par suite : $F\neq\varnothing$

2) Montrons que : $F\subset[0;1]\times[0;1]$?

Soit :$(x;y)\in F \Rightarrow (x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y \ et \ y^2\le x \Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \ et\, y\in\mathbb{R}^+ \ et \ x^2\le y \ et \ y^2\le x$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \ et\, y\in\mathbb{R}^+ \ et \ x^4\le y^2 \ et \ y^2\le x \Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \ et\, y\in\mathbb{R}^+ \ et \ x^4\le x$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \ et \ x^4-x\le 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \ et \ x(x^3-1)\le 0 \Rightarrow x\ge 0 \ et \ x^3\le 1^3 \Rightarrow 0\le x\le 1$

De la même manière on montre que : $0 \leq y \leq 1$

$\Rightarrow (x;y) \in [0;1] \times [0;1]$

Donc : $F \subset [0;1] \times [0;1]$

Exercice7: Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - |x| + 3 \end{array}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Solution : $f(x) = 2x - |x| + 3$

Si $x \in]-\infty;0]$ alors : $f(x) = 2x + x + 3 = 3x + 3$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est l'application $\begin{array}{l} g :]-\infty;0] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + 3 \end{array}$

Exercice8 : Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Telle que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

1) Montrer que : $f(0) = 0$

2) Montrer que : $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$

3) On suppose que : $f(1) \neq 0$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = n$ b) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z}$; $f(m) = m$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ d) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q}$; $f(r) = r$

Solution : 1) On a : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Pour : $x = 0$ *et* $y = 0$

On a donc : $f(0+0) = f(0) + f(0)$

$\Rightarrow f(0) + 0 = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

2) On a : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

Pour : $x = 1$ *et* $y = 1$

On a donc : $f(1 \times 1) = f(1) \times f(1)$

$\Rightarrow f(1) = f(1) \times f(1) \Rightarrow f(1) - f(1) \times f(1) = 0$

$\Rightarrow f(1)(1 - f(1)) = 0 \Rightarrow 1 - f(1) = 0$ *ou* $f(1) = 0$

$\Rightarrow f(1) = 1$ *ou* $f(1) = 0$

3) On suppose que : $f(1) \neq 0$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = n$

Notons P(n) La proposition : ‘ $f(n) = n$ ’

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $f(0) = 0$

Donc : P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $f(n) = n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $f(n+1) = n+1$??

$f(n+1) = f(n) + f(1)$ Mais on a : $f(n) = n$ et $f(1) = 1$

Alors : $f(n+1) = n+1$

Donc : P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = n$

b) Montrons que : $\forall m \in \mathbb{Z}$; $f(m) = m$

Soit : $m \in \mathbb{Z}$

Cas1 : Si $m \in \mathbb{N}$ d'après a) on a : $f(m) = m$

Cas2 : Si $m \in \mathbb{Z}^-$ alors : $-m \in \mathbb{N}$

Donc : $f(-m) = -m$

On a aussi : $f(m + (-m)) = f(0) = 0$

Donc : $f(m) + f(-m) = 0$

Donc : $f(m) = -f(-m) = -(-m) = m$

Donc dans tous les cas : $f(m) = m$

Conclusion : $\forall m \in \mathbb{Z}$; $f(m) = m$

c) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$: On a : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

Donc : $f\left(n \times \frac{1}{n}\right) = f(n) \times f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = 1$ c'est-à-dire : $f(n) \times f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Donc : $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}$ car $f(n) = n$

d) Montrons que : $\forall r \in \mathbb{Q}$; $f(r) = r$

Soit : $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (m; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $r = \frac{m}{n}$

$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \times \frac{1}{n}\right) = f(m) \times f\left(\frac{1}{n}\right) = m \times \frac{1}{n} = r$

Conclusion : $\forall r \in \mathbb{Q}$; $f(r) = r$

Exercice9 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

1) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 2) $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 3) $h : \begin{array}{l} [0;1] \to [0;2] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Solution : 1) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ $f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.

-1 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

2)a) $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ Soient $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$

Car $x_1 \geq 0$ ≥ 0 et $x_2 \geq 0$

Donc f est injective

b) Soit $y \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $g(x) = y$, donc f est surjective.

f est donc bijective

3) $h : \begin{array}{l} [0;1] \to [0;2] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

a) Soient $x_1 \in [0;1]$ et $x_2 \in [0;1]$

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$

Car $x_1 \geq 0$ ≥ 0 et $x_2 \geq 0$

Donc h est injective

b) 2 n'a pas d'antécédent, car h x) = 2 ⇔ x^2 = 2 n'a pas de solution dans [0,1]. h n'est pas surjective

h N'est pas bijective

Exercice10 : Soit l'application : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$:

b) f est-elle surjective ?

c) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}(\{3\})$

2) Montrer que : $f^{-1}\left(\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

3) Montrer que f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$: on a : $|f(x)| = \left|\dfrac{x}{1+|x|}\right| = \dfrac{|x|}{|1+|x||} = \dfrac{|x|}{1+|x|}$ car $1+|x| \succ 0$

On a : $|x| \prec |x|+1$ car $|x|+1-|x| = 1 \succ 0$

Donc : $\frac{|x|}{1+|x|} \prec \frac{1+|x|}{1+|x|}$ c'est-à-dire : $|f(x)| \prec 1$:

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

C'est-à-dire : $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Donc : par exemple 1 ou 2 n'admet pas d'antécédents

Donc f n'est pas surjective

c) Déterminons : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$: $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}\right\}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - |x| - 1 = 0$

Si : $x \geq 0$ $\quad 2x - |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Si : $x \prec 0$ $\quad 2x - |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ pas de solutions : car $x \prec 0$

Conclusion : $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Par suite : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{1\}$

$f^{-1}(\{3\}) = \varnothing$ Car $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \prec 1$ et $3 \geq 1$

2) Montrons que : $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$: $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}$

$x \in f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{1+|x|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1+|x|}{2}$ car : $1+|x| \succ 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1+|x|}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1+x}{2}$ car $x \geq 0$ et donc : $|x| = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq \frac{1+x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ 2x \leq 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0,1]$$

Alors : $x \in f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow x \in [0,1]$ et par suite : $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

3) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$: Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow \left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right| = \left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right| \Rightarrow \frac{|x_1|}{1+|x_1|} = \frac{|x_2|}{1+|x_2|} \Rightarrow |x_1|(1+|x_2|) = |x_2|(1+|x_1|)$$

$$\Rightarrow |x_1||x_2| + |x_1| = |x_1||x_2| + |x_2| \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

On remplace dans : $\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_1|} \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

- On a : f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

Soit : $y \in \left]-1,1\right[$: Montrons que : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x}{|x|+1}=y$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $y=0$ alors $\frac{x}{|x|+1}=0 \Leftrightarrow x=0$ et donc : $\exists! x=0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=0$

Si : $y \in \left]0,1\right[$ alors $\frac{x}{|x|+1}=y \Rightarrow x \succ 0$

$\frac{x}{|x|+1}=y \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=y \Leftrightarrow x=(x+1)y \Leftrightarrow x-xy=y \Leftrightarrow x(1-y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$ car : $y=\left]0,1\right[$

Donc : Si : $y \in \left]0,1\right[$ alors $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Si : $y \in \left]-1,0\right[$ alors $-1 \prec y \prec 0$ donc : $\frac{x}{|x|+1}=y \Rightarrow x \prec 0$

$\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow x=(1-x)y \Leftrightarrow x=y-xy \Leftrightarrow x+xy=y \Leftrightarrow x(1+y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}$ car : $-1 \prec y \prec 0$

Donc : Si : $y \in \left]-1,0\right[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Conclusion : $\forall y \in \left]-1,1\right[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Par suite : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

Résumé : Si : $y \in \left[0,1\right[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}=f^{-1}(y)$

Si : $y \in \left]-1,0\right[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}=f^{-1}(y)$

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $\begin{array}{l} \left]-1,1\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{y}{1-y} & si \ \ x \in \left[0,1\right[\\ \frac{y}{1+y} & si \ \ x \in \left]-1,0\right[\end{cases} \end{array}$

Exercice11 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y \ ; xy) \end{array}$

1) a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?

2) Soient les ensembles : $E=\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$ et $F=\{(s;p) \in \mathbb{R}^2 / s^2-4p \geq 0\}$

Montrer que : $f(E)=F$

3) Soit g la restriction de f sur E

Montrer que g : est une bijection de E vers F et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

Solution : 1) Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: On remarque que : $f(x;y)=f(y;x)$

En effet : $f(x;y)=(x+y\ ;xy)=(y+x\ ;yx)=f(y;x)$

En particulier par exemple : $f(0;1)=(0+1\ ;0\times1)=(1+0\ ;1\times0)=f(0;1)$ mais $(1;0)\neq(0;1)$

Donc : f n'est pas injective

2) Soit : $(s;p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $\exists?(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y)=(s;p)$??

$$f(x;y)=(s;p)\Leftrightarrow(x+y\ ;xy)=(s;p)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=s\\xy=p\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(x;y)$ est solution de l'équation : $X^2-sX+p=0\Leftrightarrow\Delta=s^2-4p\geq0$

Donc : si $\Delta=s^2-4p\prec0$ $f(x;y)=(s;p)$ n'a pas de solutions donc f n'est pas surjective

En particulier par exemple : $(s;p)=(1;1)$: $\Delta=1^2-4\times1=-3\prec0$

L'équation : $f(x;y)=(1;1)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

Donc : $(1;1)\in\mathbb{R}^2$ et n'a pas d'antécédents par f par suite : f n'est pas surjective

3) Soit g la restriction de f sur E

Montrons que g : est une bijection de E vers F et déterminons sa bijection réciproque g^{-1} :

Soit : $(s;p)\in F$; $\exists?!(x;y)\in E$ tel que : $g(x;y)=(s;p)$??

$$g(x;y)=(s;p)\Leftrightarrow(x+y\ ;xy)=(s;p)\text{ et }s^2-4p\geq0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=s\\xy=p\end{cases}\text{ et }s^2-4p\geq0$$

Donc : $(x;y)$ et $x\leq y$ est solution unique de l'équation : $X^2-sX+p=0$

Donc : g : est une bijection de E vers F

$$X^2-sX+p=0\Leftrightarrow x=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}\ et\ x=\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

$$g(x;y)=(s;p)\Leftrightarrow(x;y)=g^{-1}(s;p)=\left(\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2};\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}\right)$$

$g^{-1}:F\to E$

$$(x;y)\mapsto\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2};\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien