http://www.xriadiat.com **DL1: Q** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Considérons la fonction propositionnelle : $P(n):(n\in\mathbb{N});A(n)=n^2+n+41$

1) Calculer : $A(0);A(1);A(2)$ et $A(40)$

2) Montrer que la proposition suivante est fausse :« $(\forall n\in\mathbb{N}^*);A(n):$ est nombre premier »

Exercice2 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Montrer que : $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

4) Montrer que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

5) Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Exercice3 : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in]-1;1[$ et $b\in]-1;1[$

1)Montrer que : $-1\prec\frac{a+b}{1+ab}\prec1$

2) Montrer que : $|a+b|\leq|1+ab|$

Exercice4 : Démontrer en utilisant le Raisonnement par équivalences que :

$$\forall a\in\mathbb{R};\left(|a-2|\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{10}\leq\frac{1}{3a+2}\leq\frac{1}{6}\right)$$

Exercice5 : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrer que : $|2x^2+5xy+3y^2|\leq3\Rightarrow|x+y|\leq\sqrt{3}\ \ ou\ \ |2x+3y|\leq\sqrt{3}$

Exercice6 : Démontrer par l'absurde que : $\forall a\in\mathbb{Q};\forall n\in\mathbb{N}^*:a+\frac{1}{n\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$

Exercice7 : 1) a) En utilisant un raisonnement par équivalence :

Montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$

b) Montrer que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$: $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq x+y+1$

Indication : appliquer b) puis a)

Exercice8 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$.

Exercice9 : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: On pose : $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$

1)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$.

2) a) vérifier que : $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$

b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_2): $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0$

Exercice11 : Soit l'ensemble suivant : $A = \left\{ \frac{2x}{x^2+1} / x \in \mathbb{R} \right\}$

1) Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{2} \in A$ et en déduire que : $A \neq \varnothing$

2) Montrer que : $A \subset [-1;1]$

Exercice12 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :
$A = \{ x \in \mathbb{Z} / |x+1| \leq 3 \}$ et $B = \{ x \in \mathbb{Z} / |2x - a| \leq 4 \}$

1) Ecrire A en extension
2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $A \cap B = \varnothing$
3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N} \cap B = \varnothing$
4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $B \subset \mathbb{N}$

Exercice13 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E ; Monter que :

1) $A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice14 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x|x|}{x^2+1} \end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) Montrer que f est injective

3) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

b) Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien