http://www.xriadiat.com **DL1: Q** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Considérons la fonction propositionnelle : $P(n):(n\in\mathbb{N});A(n)=n^2+n+41$

1) Calculer : $A(0);A(1);A(2)$ et $A(40)$

2) Montrer que la proposition suivante est fausse :« $(\forall n\in\mathbb{N}^*);A(n):$ est nombre premier »

Solution :1) $A(0)=0^2+0+41=41$; $A(1)=1^2+1+41=43$; $A(2)=2^2+2+41=47$; $A(40)=40^2+40+41=1681$

2) La négation de:« $(\forall n\in\mathbb{N}^*);A(n):$ est nombre premier » est :

« $(\exists n\in\mathbb{N}^*);A(n):$ n'est pas nombre premier

$(\exists n=40\in\mathbb{N}^*);A(40)=1681=41\times41$ n'est pas nombre premier

Donc : La négation de:« $(\forall n\in\mathbb{N}^*);A(n):$ est nombre premier » est vraie

Par suite : la proposition « $(\forall n\in\mathbb{N}^*);A(n)$ » est fausse

Exercice2 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Montrer que : $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

4) Montrer que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

5) Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Solution :1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :
Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1$
$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Alors : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$

Donc : par contraposition : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 Est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3
Soit : $n\in\mathbb{N}$
Par contraposée montrons que :

n n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 3 :
On suppose que n n'est pas un multiple de 3.
On a 2 cas possibles seulement pour n :
$n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

1ére cas : $n=3k+1$ alors $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\times(3k^2+2k)+1=3k'+1$

Avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2 n'est pas un multiple de 3 :

2ére cas : $n=3k+2$ alors $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\times(3k^2+4k+1)+1=3k'+1$

Avec : $k'=3k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2 n'est pas un multiple de 3

On conclut que dans les deux cas n^2 n'est pas un multiple de 3: Ceci signifie que :

n n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 3 :

D'où par contraposée

n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$

Donc : il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ En Elevant légalité au carré nous obtenons : $a=b\sqrt{3}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{3}\right)^2$

$\Rightarrow a^2=3b^2\Rightarrow$ 3 divise a^2 $\Rightarrow$(D'après ce qui précède) $a=3k$ (1) avec $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=3b^2\Rightarrow 9k^2=3b^2\Rightarrow 3k^2=b^2\Rightarrow b^2$ est un multiple de 3 $\Rightarrow b$ est un multiple de 3 (2) (D'après ce qui précède)

Donc on a : 3 divise a et b Cad : $a\wedge b\neq 1$

Nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse : $a\wedge b=1$.

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

4) Montrons que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que : $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{6}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{6}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{6}\right)^2\Rightarrow a^2=6b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair $\Rightarrow a=2k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=6b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$

5) Montrons que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow 5+2\sqrt{6}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2\sqrt{6}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

Nous obtenons une contradiction car $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$

Donc notre supposition est fausse donc : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Exercice3 : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in]-1;1[$ et $b\in]-1;1[$

1)Montrer que : $-1\prec\frac{a+b}{1+ab}\prec 1$

2) Montrer que : $|a+b|\leq|1+ab|$

Solution : 1) $-1\prec\frac{a+b}{1+ab}\prec 1\Leftrightarrow\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|\prec 1\Leftrightarrow|a+b|\prec|1+ab|$

$\Leftrightarrow |a+b|^2 \prec |1+ab|^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \prec 1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1 \Leftrightarrow (a^2-1)(1-b^2) \prec 0$

Donc : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[\Rightarrow -1 \prec a \prec 1$ et $-1 \prec b \prec 1$

$\Rightarrow |a| \prec 1$ et $|b| \prec 1 \Rightarrow a^2 \prec 1$ et $b^2 \prec 1 \Rightarrow a^2-1 \prec 0$ et $1-b^2 \succ 0 \Rightarrow (a^2-1)(1-b^2) \prec 0$

Donc : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[\Rightarrow -1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1$

2) On a : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1 \Rightarrow \left|\frac{a+b}{1+ab}\right| \prec 1 \Rightarrow \frac{|a+b|}{|1+ab|} \prec 1 \Rightarrow |a+b| \prec |1+ab|$

Exercice4 : Démontrer en utilisant le Raisonnement par équivalences que :

$\forall a \in \mathbb{R}; \left(|a-2| \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \le \frac{1}{3a+2} \le \frac{1}{6} \right)$

Solution : Soit : $a \in \mathbb{R}$;

$|a-2| \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le a-2 \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}+2 \le a \le \frac{2}{3}+2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \le a \le \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 \le 3a \le 8 \Leftrightarrow 6 \le 3a+2 \le 10$

Donc : $|a-2| \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \le \frac{1}{3a+2} \le \frac{1}{6}$

Exercice5 : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: Montrer que : $|2x^2+5xy+3y^2| \le 3 \Rightarrow |x+y| \le \sqrt{3}$ *ou* $|2x+3y| \le \sqrt{3}$

Solution : Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $|x+y| \succ \sqrt{3}$ *et* $|2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow |2x^2+5xy+3y^2| \succ 3$

$|x+y| \succ \sqrt{3}$ *et* $|2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow |2x+3y||x+y| \succ \sqrt{3} \times \sqrt{3} \Rightarrow |(2x+3y)(x+y)| \succ 3$

$\Rightarrow |2x^2+3xy+2xy+3y^2| \succ 3$

$\Rightarrow |2x^2+5xy+3y^2| \succ 3$

Donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $|x+y| \succ \sqrt{3}$ *et* $|2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow |2x^2+5xy+3y^2| \succ 3$

Alors : Par contraposition : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$|2x^2+5xy+3y^2| \le 3 \Rightarrow |x+y| \le \sqrt{3}$ *ou* $|2x+3y| \le \sqrt{3}$

Exercice6 : Démontrer par l'absurde que : $\forall a \in \mathbb{Q}; \forall n \in \mathbb{N}^* : a+\frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Solution : Soit $a \in \mathbb{Q}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$: Montrons par l'absurde que : $a+\frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Pour ceci, supposons que : $a+\frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ C'est-à-dire : $a+\frac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$

On a : $a+\frac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$ et puisque $a \in \mathbb{Q}$ il en découle que : $\frac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$

Et en multipliant par rentier naturel : $2n \in \mathbb{Q}$ on- abouti a : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Résultat qui contredit le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

D'où : $\forall a \in \mathbb{Q}; \forall n \in \mathbb{N}^* : a+\frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Exercice7 : 1) a) En utilisant un raisonnement par équivalence :

Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1} \le a+1$

b) Montrer que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le x+y+1$

Indication : appliquer b) puis a)

Solution :1) Soit : $a \in \mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{2a+1} \le a+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2a+1}\right)^2 \le (a+1)^2 \Leftrightarrow 2a+1 \le a^2+2a+1 \Leftrightarrow 0 \le a^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1} \le a+1$ est aussi une Proposition vraie

2) Soit : $(a;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow 2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow 0 \le a^2+b^2-2ab \Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$$

Donc : $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ est aussi une Proposition vraie

2) Soient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x \succ 0 \Rightarrow 4x \succ 0 \Rightarrow 4x+1 \succ 1 \quad et\ 1 \succ 0 \Rightarrow a = 4x+1 \succ 0$$

$$y \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow y \succ 0 \Rightarrow 4yx \succ 0 \Rightarrow 4y+1 \succ 1 \quad et\ 1 \succ 0 \Rightarrow b = 4y+1 \succ 0$$

D'après b) on a alors : $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ c'est-à-dire : $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le \sqrt{\dfrac{\sqrt{4x+1}^2+\sqrt{4y+1}^2}{2}}$

Donc : $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le \sqrt{\dfrac{4x+1+4y+1}{2}}$ c'est-à-dire : $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le \sqrt{\dfrac{4x+4y+2}{2}}$

Donc : $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le \sqrt{2x+2y+1}$ c'est-à-dire : $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le \sqrt{2(x+y)+1}$ ❶

D'après a) et puisque : $a = x+y \succ 0$ alors : $\sqrt{2(x+y)+1} \le x+y+1$ ❷

De : ❶ et ❷ En déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \le x+y+1$

Exercice8 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1) - 1$.

Solution : Notons P(n) la proposition : $"S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1) - 1"$

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^1(2\times1+1)=-3$ et $(-1)^1(1+1)-1=-2-1=-3$

Donc P (1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^{n+1}(n+2)-1$??

Remarque : $(-1)^{n+1}=(-1)^n\times(-1)^1=-(-1)^n$

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)+(-1)^{n+1}(2n+2+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1+(-1)^{n+1}(2n+3)$

$S_{n+1}=(-1)^{n+1}\times(-1)(n+1)+(-1)^{n+1}(2n+3)-1=(-1)^{n+1}(-n-1+2n+3)-1$

$S_{n+1}=(-1)^{n+1}(n+2)-1$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

Exercice9 : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: On pose : $P_n=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$

1)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2) a) vérifier que : $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

$$P_n=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\times\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\times\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

Il suffit de montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$; (E_n)"$\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$"

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons $\prod_{k=2}^{k=2}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{2(2+1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Par suite (E_2) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Supposons que (E_n) soit vraie c'est-à-dire : $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}$

3étapes : Nous allons montrer que (E_{n+1}) est vraie.

Montrons alors que : $\prod_{k=2}^{k=n+1} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$?

$$\prod_{k=2}^{k=n+1} \frac{k-1}{k+1} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k+1} \times \frac{n+1-1}{n+1+1} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k+1} \times \frac{n}{n+2}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}$

Donc : $\prod_{k=2}^{k=n+1} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ c'est-à-dire : (E_{n+1}) est vraie.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}$.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2) a) Vérifions que : $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$

$$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 1 = k^2 + k + 1$$

b) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

C'est-à-dire : Montrons que : $\frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$?

C'est-à-dire : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{n^2+n+1}{3}$?

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons $\prod_{k=2}^{k=2} \frac{2^2+2+1}{2^2-2+1} = \frac{7}{3}$ et $\frac{2^2+2+1}{3} = \frac{7}{3}$

Par suite la propriété est vraie pour n=2

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Supposons que : $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{n^2+n+1}{3}$

Montrons alors que : $\prod_{k=2}^{k=n+1} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{(n+1)^2+n+1+1}{3} = \frac{n^2+3n+3}{3}$?

$$\prod_{k=2}^{k=n+1}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\times\frac{(n+1)^2+n+1+1}{(n+1)^2-n-1+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\times\frac{n^2+2n+1+n+1+1}{n^2+2n+1-n-1+1}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$

Donc : $\prod_{k=2}^{k=n+1}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{3}\times\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}=\frac{n^2+3n+3}{3}$

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_2): $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : (I_2): $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$

$D_2=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_2) :

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1$

Le tableau de signe de l'expression $2x-1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$

1ieme cas : si $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $2x-1\geq 0$

$\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\leq(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1\leq 4x^2-4x+1\Leftrightarrow -3x^2+4x\leq 0$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc : $S_1=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\cap\left(\left]-\infty;0\right]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right[\right)=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2ieme cas : si $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors $2x-1\prec 0$

Donc : $S_2=\varnothing$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $S=S_1\cup S_2=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice11 : Soit l'ensemble suivant : $A=\left\{\frac{2x}{x^2+1}\,/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A$ et en déduire que : $A\neq\varnothing$

2) Montrer que : $A\subset[-1;1]$

Solution : 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{2x}{x^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{3}\left(x^2+1\right)=4x \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \left(x^2+1\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}x$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / 3x^2-4\sqrt{3}x+3=0$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \left(\sqrt{3}x\right)^2-2\times 2\sqrt{3}x+\left(\sqrt{3}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \left(\sqrt{3}x-3\right)^2=0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{3}x-3=0$

or : $\exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{3}x-3=0$ est vraie car : $\exists x=\sqrt{3} \in \mathbb{R} / \sqrt{3}x-3=0$

Par suite : $\frac{\sqrt{3}}{2} \in A$ est vraie aussi

Remarque : on peut remarquer que : $\frac{2\times\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{2x}{x^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D'où : $\frac{\sqrt{3}}{2} \in A$

2) Montrons que : $A \subset [-1;1]$

Soit $y \in A$ Montrons que : $y \in [-1;1]$?

C'est à dire : Montrons que : $|y| \le 1$

On a : $y \in A$ Donc : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{2x}{x^2+1}=y$

$|y|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{|2x|}{|x^2+1|}=\frac{2|x|}{x^2+1}$

$1-\frac{2|x|}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2|x|}{x^2+1}=\frac{|x|^2+1-2|x|}{x^2+1}=\frac{\left(|x|-1\right)^2}{x^2+1}\ge 0$

Donc : $|y| \le 1$

D'où : $\forall y \in \mathbb{R}$; $y \in A \Rightarrow [-1;1]$

Conclusion : $A \subset [-1;1]$

Exercice12 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$A=\left\{x \in \mathbb{Z} / |x+1| \le 3\right\}$ et $B=\left\{x \in \mathbb{Z} / |2x-a| \le 4\right\}$

1) Ecrire A en extension
2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $A \cap B=\varnothing$
3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N} \cap B=\varnothing$
4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $B \subset \mathbb{N}$

Solution : 1) il est aisé de voir que : $E=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$

2) $F=\left\{x \in \mathbb{Z} / -4 \le 2x-a \le 4\right\}=\left\{x \in \mathbb{Z} / 2x-4 \le a \le 2x+4\right\}$

Donc : $C_{\mathbb{Z}}^{F}=\left\{x \in \mathbb{Z} / 2x-4 \succ a.ou.a \succ 2x+4\right\}$

$E \cap F=\varnothing \Leftrightarrow E \subset C_{\mathbb{Z}}^{F} \Leftrightarrow \forall x \in E; x \in C_{\mathbb{Z}}^{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; 2x-4 \succ a \quad ou \quad a \succ 2x+4$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; a \in \left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4;+\infty\right[\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in E}\left(\left]-\infty;2x-4\right[\cup \left]2x+4;+\infty\right[\right)$

Puisque : $E=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$ on obtient : $E \cap F=\varnothing \Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty;2(-4)-4\right[\cup \left]2\times 2+4;+\infty\right[\right)$

$\Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty;-12\right[\cup \left]8;+\infty\right[\right)$

3)on a : $\overline{F} = \left\{x \in \mathbb{Z} / 2x-4 \succ a.ou.a \succ 2x+4\right\}$

Donc nous pouvons écrire : $\mathbb{N} \cap F = \varnothing \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset \overline{F} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; x \in \overline{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; a \in \left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x\in\mathbb{N}} \left(\left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4;+\infty\right[\right) \Leftrightarrow a \in \left]-\infty;-4\right[$

3)On a : $F = \left\{x \in \mathbb{Z} / -2+\frac{a}{2} \le x \le 2+\frac{a}{2}\right\}$

Donc : $F \subset \mathbb{N} \Leftrightarrow F = \left(\forall x \in \left\{x \in \mathbb{Z} / -2+\frac{a}{2} \le x \le 2+\frac{a}{2}\right\}\right); x \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow -1 \prec -2+\frac{a}{2} \Leftrightarrow -2 \prec -4+a \Leftrightarrow 2 \prec a$

Exercice13 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E ; Monter que :

1) $A = (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Solution :1) $(A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$

$= \left[(A \cap B) \cap \left(C \cup \overline{C}\right)\right] \cup \left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(C \cup \overline{C}\right)\right]$

$= \left[(A \cap B) \cap E\right] \cup \left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cap E\right] = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = A \cap E = A$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = \left[B \cup (A \cap C)\right] \cap (C \cup A)$

$= (B \cap (C \cup A)) \cup ((A \cap C) \cap (C \cup A)) = (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$

3) Montrons que : $\begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C \\ A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \end{cases}$

$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap \overline{C}} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \Rightarrow A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup C\right)$

$\Rightarrow \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap C) \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Inversement : $A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
D'après l'implication directe
Donc : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice14 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x|x|}{x^2+1} \end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) Montrer que f est injective

3) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

b) Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : $f(x)=\frac{x|x|}{x^2+1}$

1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $x\geq 0$: $|x|=x$ et $f(x)=\frac{x\times x}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$

$1-f(x)=1-\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\succ 0$ donc : $f(x)\prec 1$

$f(x)-(-1)=\frac{x^2}{x^2+1}+1=\frac{x^2+x^2+1}{x^2+1}=\frac{2x^2+1}{x^2+1}\succ 0$ donc : $-1\prec f(x)$

C'est-à-dire : $\forall x\geq 0$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Si : $x\prec 0$: $|x|=-x$ et $f(x)=\frac{-x\times x}{x^2+1}=\frac{-x^2}{x^2+1}$

On déjà montrer que : $-1\prec\frac{x^2}{x^2+1}\prec 1$ (on procède comme précédemment)

Donc : $-1\prec-\frac{x^2}{x^2+1}\prec 1$

C'est-à-dire : $\forall x\prec 0$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

b) On a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Donc : L'application f n'est pas surjective car 2 par exemple n'a pas d'antécédent par f

2) Montrons que f est injective :

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

Montrons que : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

Supposons : $f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1}=\frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1}$ *est vraie* $\Rightarrow x_1$ *et* x_2 Ont le même signe.

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $x_1=0$ alors : $\frac{0\times|0|}{0^2+1}=\frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1}\Rightarrow 0=x_2|x_2|\Rightarrow 0=x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Si : $x_1\succ 0$ et $x_2\succ 0$ $\Rightarrow\frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1}=\frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1}\Rightarrow\frac{x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{x_2^2}{x_2^2+1}\Rightarrow x_1^2(x_2^2+1)=x_2^2(x_1^2+1)$

$\Rightarrow x_1^2x_2^2+x_1^2=x_2^2x_1^2+x_2^2\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|$ et comme : $x_1\succ 0$ et $x_2\succ 0$

$\Rightarrow x_1=x_2$

Si : $x_1\prec 0$ et $x_2\prec 0$ $\Rightarrow\frac{x_1|x_1|}{x_1^2+1}=\frac{x_2|x_2|}{x_2^2+1}\Rightarrow\frac{-x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{-x_2^2}{x_2^2+1}\Rightarrow\frac{x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{x_2^2}{x_2^2+1}$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ et comme : $x_1 \prec 0$ et $x_2 \prec 0$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc : $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall x_2 \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x_1|x_1|}{x_1^2+1} = \dfrac{x_2|x_2|}{x_2^2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

3) Déterminons : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}\right\}$$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x|x| + 1 = 0$

Si : $x \geq 0$ $\quad x^2 - 2x \times x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \cancel{x = -1}\ ou\, x = 1$

Puisque : $x \geq 0$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Si : $x \prec 0$ $\quad x^2 + 2x \times x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{1}{3}$ pas de solutions

Conclusion : $f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Par suite : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right) = \{1\}$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Soit : $y \in]-1,1[$: Montrons que : $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x|x|}{x^2+1} = y$$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $y = 0$ alors $\dfrac{x|x|}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc : $\exists! x = 0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = 0$

Si : $y \in]0,1[$ alors $\dfrac{x|x|}{x^2+1} = y \Rightarrow x \succ 0$

$\dfrac{x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow x^2 = (x^2+1)y \Leftrightarrow x^2 - x^2 y = y \Leftrightarrow x^2(1-y) = y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y}{1-y} \succ 0$ car : $y =]0,1[$

$\dfrac{x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ car : $x \succ 0$

Donc : Si : $y \in]0,1[$ alors $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Si : $y \in]-1,0[$ alors $-1 \prec y \prec 0$

Donc : $\dfrac{x|x|}{x^2+1} = y \Rightarrow x \prec 0$

$\dfrac{-x^2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow -x^2 = (x^2+1)y \Leftrightarrow -x^2 - x^2 y = y \Leftrightarrow -x^2(1+y) = y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-y}{1+y} \succ 0$ car : $-1 \prec y \prec 0$

$-\frac{x^2}{x^2+1}=y \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{-y}{1+y}}$ car : $x \prec 0$

Donc : Si : $y \in \left]-1,0\right[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Conclusion : $\forall y \in \left]-1,1\right[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Par suite : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

Résumé : Si : $y \in \left[0,1\right[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y}{1-y}}=f^{-1}(y)$

Si : $y \in \left]-1,0\right[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{-y}{1+y}}=f^{-1}(y)$

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $\begin{array}{l} \left]-1,1\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{1-x}} si \ x \in \left[0,1\right[\\ -\sqrt{\frac{-x}{1+x}} si \ x \in \left]-1,0\right[\end{cases} \end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien