http://www.xriadiat.com **DL1: P** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et déterminer leurs négations :

1) P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2+3x+7=0$"

2) Q : « $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2=9 \Rightarrow x=-3$ »

3) R: « $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

4) S: « $\sqrt{3}+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

5) T: « $\exists n \in \mathbb{N}; 2n+5$ $est\ pair$ » ou « $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n>10$ »

6) M : « $\forall x \in \mathbb{R}; x^2+1 \geq 2x$ »

7) N: « $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; y<x+1$ »

Exercice2 : Démontrer en utilisant la contraposée que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; (x+y \leq 6 \Rightarrow x \leq 3\ ou\ y \leq 3)$

Exercice3 : En utilisant un raisonnement par disjonction des cas (ou une récurrence)
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 5n^3+11n^2+3$ est un nombre impair

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1): $x^2-|x-2|+5=0$

Exercice5 : (Récurrence) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$.

Exercice6 : Soient $a ; b ; c$ des nombres entiers relatifs impairs

1) Montrer que : l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+x-(2n+1)=0$ Où $n \in \mathbb{N}$

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{8n+5} \notin \mathbb{Q}$

4) Montrer que : $\sqrt{2021} \notin \mathbb{Q}$

Exercice7 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A=\left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{x^2-2x+6}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$; $B=\left\{x \in \mathbb{Z} / |2x-1| \leq \frac{5}{2}\right\}$ et $C=\left\{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2-4y^2=12\right\}$

Exercice8 : Soient les ensembles suivants : $E=\left\{\frac{5n+2}{3} / n \in \mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{\frac{2n-8}{6} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $-\frac{4}{3} \in F$ et $-\frac{4}{3} \notin E$

2) Montrer que : $E \subset F$

3) Est-ce qu'on a : $E=F$?

Exercice9 : Soit f l'application : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x \end{array}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

2) Montrer que : f est injective

Exercice10 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} \end{array}$

1) Montrer que : f n'est pas injective

2) a) Montrer que : $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

b) f est-elle surjective ? justifier

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} h : \mathbb{R}^+ \to \left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto x + \sqrt{x} + \dfrac{1}{4} \end{array}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$

2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice12 : Soit l'ensemble :

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / -y \le x \le y\}$ et soit l'application f : $\begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto (x^2 + y^2 \ ; 2xy) \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) f est-elle surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien