http://www.xriadiat.com **DL1: P** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et déterminer leurs négations :

1) P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 7 = 0$"

2) Q : « $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ »

3) R: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} < 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

4) S: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

5) T: « $\exists n \in \mathbb{N}; 2n+5$ $est\ pair$ » ou « $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n > 10$ »

6) M : « $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \geq 2x$ »

7) N : « $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; y < x+1$ »

Solution : 1) P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 7 = 0$"

$x^2 + 3x + 7 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 7 = -19$. donc : pas de solution

P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 7 = 0$" est fausse

$\overline{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 7 \neq 0$"

2) Q : « $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ »

Soit : $a \in \mathbb{R}^-$: $x^2 = 9 \Rightarrow x = -\sqrt{9}\ ou\ x = \sqrt{9}$ $\Rightarrow x = -3\ ou\ x = 3$ et puisque : $x \in \mathbb{R}^-$

Alors : Q : $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ est vraie

$\overline{Q}$: « $\exists x \in \mathbb{R}^-; x^2 = 9\ et\ x \neq -3$ »

3) R: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} < 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{3}\times\sqrt{5} = 8 + 2\sqrt{15}$ et $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ donc : $\sqrt{3}+\sqrt{5} \succ 2\sqrt{2}$

Donc : "$\sqrt{3}+\sqrt{5} < 2\sqrt{2}$" est fausse

$\sqrt{3+5}^2 = \sqrt{8}^2 = 8$ et $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ donc : "$\sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$" est fausse

Par suite : R: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} < 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ » est vraie (voir la table de vérité de l'implication)

$\overline{R}$: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} < 2\sqrt{2}\ et\ \sqrt{3+5} \neq \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

4) S: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

"$\sqrt{3}+\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$" est vraie et "$\sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$" est fausse

Par suite : S: « $\sqrt{3}+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ » est fausse

$\overline{S}$: « $\sqrt{3}+\sqrt{5}\leq 2\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3+5}\neq\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

5) T: « $\exists n\in\mathbb{N}; 2n+5$ $est\ pair$ » ou « $\exists n\in\mathbb{N}; 2^n>10$ »

Soit $n\in\mathbb{N}$: $2n+5=2n+4+1=2(n+2)+1=2k+1$ $est\ donc : impair$

"$\exists n\in\mathbb{N}; 2n+5$ $est\ pair$" est fausse

"$\exists n\in\mathbb{N}; 2^n>10$" est vraie car pour : $n=4; 2^4=16>10$

Par suite : T: « $\exists n\in\mathbb{N}; 2n+5$ $est\ pair$ » ou « $\exists n\in\mathbb{N}; 2^n>10$ » est vraie

$\overline{T}$: « $\forall n\in\mathbb{N}; 2n+5$ $est\ impair$ » et « $\forall n\in\mathbb{N}; 2^n\leq 10$ »

6) Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2+1-2x=(x-1)^2\geq 0$

Donc : M : « $\forall x\in\mathbb{R}; x^2+1\geq 2x$ » est vraie

$\overline{M}$: « $\exists x\in\mathbb{R}; x^2+1\prec 2x$ »

7) N: « $\forall x\in\mathbb{R}; \exists y\in\mathbb{R}; y<x+1$ »

Soit $x\in\mathbb{R}$:pour $y=x$ on a : $x<x+1$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}; \exists y=x\in\mathbb{R}; y<x+1$ est vraie et $\overline{N}$: « $\exists x\in\mathbb{R}; \forall y\in\mathbb{R}; y\geq x+1$ »

8) E: « $2\sqrt{17}<69 \Rightarrow \left(\cos\pi=-1\ ou\ 2^{20024}-1\prec 123232659\right)$ »

$\left(\cos\pi=-1\ ou\ 2^{20024}-1\prec 123232659\right)$ est vraie car : $\cos\pi=-1$ est vraie

Donc : S: « $2\sqrt{17}<69 \Rightarrow \left(\cos\pi=-1\ ou\ 2^{20024}-1\prec 123232659\right)$ » est vraie

(voir la table de vérité de l'implication)

$\overline{E}$: « $2\sqrt{17}<69$ $et\left(\cos\pi\neq-1\ et\ 2^{20024}-1\geq 123232659\right)$ »

Exercice2 : Démontrer en utilisant la contraposée que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2; (x+y\leq 6 \Rightarrow x\leq 3\ ou\ y\leq 3)$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :
$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2; (x+y\leq 6 \Rightarrow x\leq 3\ ou\ y\leq 3)$

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$; Par contraposée Montrons que : $(\ x\succ 3\ et\ y\succ 3 \Rightarrow x+y\succ 6)$

$x\succ 3\ et\ y\succ 3 \Rightarrow x+y\succ 3+3 \Rightarrow x+y\succ 6 \Rightarrow -x=-8y \Rightarrow y=\frac{1}{8}x$

Par contraposée on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2; (x+y\leq 6 \Rightarrow x\leq 3\ ou\ y\leq 3)$

Exercice3 : En utilisant un raisonnement par disjonction des cas (ou une récurrence)
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} : 5n^3+11n^2+3$ est un nombre impair

Solution : Raisonnement par disjonction des cas :Soit : $n\in\mathbb{N}$. $5n^3+11n^2+3=n^2(5n+11)+3$

<u>Premier cas :</u> si n est pair :

n est pair $\Rightarrow$ n^2 est pair $\Rightarrow$ $n^2(5n+11)$ est pair $\Rightarrow$ $n^2(5n+11)+3$ est impair

(On utilise les propriétés des nombres pairs et impairs)

<u>2 iem cas :</u> si n est impair :

n est impair $\Rightarrow$ $5n$ est impair $\Rightarrow$ $5n+11$ est pair $\Rightarrow$ $n^2(5n+11)$ est pair

$\Rightarrow n^2(5n+11)+3$ est impair

Donc : $5n^3+11n^2+3$ est un nombre impair.

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall n \in \mathbb{N} : 5n^3+11n^2+3$ est un nombre impair.

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1): $x^2-|x-2|+5=0$

Solution : Soit S l'ensemble des solutions de (1)

Soit $x\in\mathbb{R}$**:** étudions le signe de : $x-2$

<u>Premier cas :</u> si $x\in[2;+\infty[$ alors $|x-2|=x-2$

Donc l'équation (1) devient : $x^2-(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta=1-28=-27\prec 0$ donc : $S_1=\varnothing$

<u>Deuxième cas :</u> si $x\in]-\infty;2[$ alors : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc l'équation (1) devient : $x^2+(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta=1-12=-11\prec 0$: Donc $S_2=\varnothing$

Finalement : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

Exercice5 : (Récurrence) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$.

Solution : Notons P(n) La proposition "$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $\sum_{k=1}^{1}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1+1}{3^1}=\frac{2}{3}$ et

$\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2\times1+5}{3^1}\right)=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{7}{3^1}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$ Donc : $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$. Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$

3étapes : Nous allons montrer que : P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k+1}{3^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}+\frac{n+2}{3^{n+1}}$ d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)+\frac{n+2}{3^{n+1}}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{6n+15-4n-8}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$.

Exercice6 : Soient $a ; b ; c$ des nombres entiers relatifs impairs

1) Montrer que : l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+x-(2n+1)=0$ Où $n\in\mathbb{N}$

3) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

4) Montrer que : $\sqrt{2021}\notin\mathbb{Q}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $r\in\mathbb{Q}$ tel que $ar^2+br+c=0$:

$r\in\mathbb{Q}\Rightarrow \exists p\in\mathbb{Z}$; $\exists q\in\mathbb{Z}^*$ tel que : $r=\frac{p}{q}$ avec $p\wedge q=1$

On a donc : $a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\left(\frac{p}{q}\right)+c=0$ donc : $a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0$

Donc : $ap^2+bpq+cq^2=0$ ①

✓ Si : p et q sont paires

2 divise p et 2 divise q donc : $p\wedge q\neq 1$

Impossible car: $p\wedge q=1$

✓ Si : p et q sont impaires

On a : ap^2 est impair et bpq est impair et cq^2 est impair

Donc : $ap^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair

✓ Si : p est pair et q est impaire

On a : ap^2 est pair et bpq est pair et cq^2 est impair

Donc : $ap^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair

✓ Si : p est impaire et q sont paire

On a : ap^2 est impair et bpq est pair et cq^2 est pair

Donc : $ap^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair.

Dans tous les cas : $ap^2+bpq+cq^2\neq 0$

Par suite : l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2+x-(2n+1)=0$ Où $n\in\mathbb{N}$

$\Delta=1^2+4(2n+1)=8n+5\succ 0$ car $n\in\mathbb{N}$

Donc : deux solutions : $x_1=\frac{-1+\sqrt{8n+5}}{2}$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{8n+5}}{2}$ D'où : $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{8n+5}}{2};\frac{-1+\sqrt{8n+5}}{2}\right\}$

3) Déduction que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

Par l'absurde, supposons que : $\sqrt{8n+5}\in\mathbb{Q}$ Alors : $-1+\sqrt{8n+5}\in\mathbb{Q}$

Alors : $\frac{-1+\sqrt{8n+5}}{2}\in\mathbb{Q}$

Alors : l'équation : $1x^2+1x-(2n+1)=0$ admet des solutions dans $\mathbb{Q}$

Contradiction : car l'équation $1x^2+1x-(2n+1)=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

($a=1\in\mathbb{Z}$; $b=1\in\mathbb{Z}$; $c=-(2n+1)\in\mathbb{Z}$)

4) Montrons que : $\sqrt{2021}\notin\mathbb{Q}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

Et on a : $8n+5=2021\Leftrightarrow 8n=2016\Leftrightarrow n=252$

Donc : $\sqrt{8\times 252+5}\notin\mathbb{Q}$ c'est-à-dire : $\sqrt{2021}\notin\mathbb{Q}$

Exercice7 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$; $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/|2x-1|\leq\frac{5}{2}\right\}$ et $C=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/x^2-4y^2=12\right\}$

Solution : a) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Il est aisé de voir que : $(\forall x\in\mathbb{Z}):\frac{x^2-2x+6}{x-1}=\frac{x^2-2x+1+5}{x-1}=\frac{(x-1)^2+5}{x-1}$

$(\forall x\in\mathbb{Z}):\frac{x^2-2x+6}{x-1}=\frac{(x-1)^2}{x-1}+\frac{5}{x-1}=x-1+\frac{5}{x-1}$

Détermination de : A ?

Soit : $x\in\mathbb{Z}/$ $x\in A\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-1+\frac{5}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-1\ divise\ 5$

$\Leftrightarrow x-1\in\{-1;1;-5;5\}\Leftrightarrow x\in\{0;2;6;-4\}$ Donc : $A=\{0;2;6;-4\}$

b) $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/|2x-1|\leq\frac{5}{2}\right\}$

Soit : $\boxed{x\in\mathbb{Z}}$: $x\in B\Leftrightarrow|2x-1|\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow-\frac{5}{2}\leq 2x-1\leq\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow-\frac{5}{2}+1\leq 2x\leq\frac{5}{2}+1\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\leq 2x\leq\frac{7}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{4}\leq x\leq\frac{7}{4}$ Puisque : $x\in\mathbb{Z}$ alors : $E=\{0;1\}$

c) $x^2-4y^2=12\Leftrightarrow(x+2y)(x-2y)=12$

$x+2y$ et $x-2y$ sont des diviseurs de 12

Les diviseurs de 12 sont 1 ;2 ;3 ;4 ;6 ; 12 et -1 ;-2 ;-3 ;-4 ;-6 ; -12 mais on remarque que :

$(x+2y)+(x-2y)=2x$ est pair **et** $(x+2y)(x-2y)=12$

On dresse un tableau :

$x-2y$	2	-2	6	-6
$x+2y$	6	-6	2	-2
x	4	-4	4	-4
y	1	-1	1	-1

$C=\{(4;1);(-4;-1)\}$

Exercice8 : Soient les ensembles suivants : $E=\left\{\frac{5n+2}{3}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{\frac{2n-8}{6}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $-\frac{4}{3}\in F$ et $-\frac{4}{3}\notin E$

2) Montrer que : $E\subset F$

3) Est-ce qu'on a : $E=F$?

Solution :1) a) Montrons que : $-\frac{4}{3}\in F$

$-\frac{4}{3}\in F \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/-\frac{4}{3}=\frac{2n-8}{6} \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/-\frac{8}{3}=\frac{2n-8}{6} \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/-8=2n-8 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/0=2n$

$-\frac{4}{3}\in F \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/n=0$

Il suffit de prendre : $n=0$

On peut vérifier que : $\frac{2n-8}{6}=\frac{2\times 0-8}{6}=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}$

Par suite : $-\frac{4}{3}\in F$

a) Montrons que : $-\frac{4}{3}\notin E$

Supposons par l'absurde que : $-\frac{4}{3}\in E$

$-\frac{4}{3}\in E \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/-\frac{4}{3}=\frac{5n+2}{3} \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/5n+2=-4$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/5n=-6 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=-\frac{5}{6}\notin\mathbb{Z}}$

Contradiction : Donc : $-\frac{4}{3}\notin E$

2) Montrons que : $E\subset F$
Soit : $r\in E$ Montrons que : $r\in F$?
$r\in E \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/r=\frac{5n+2}{3}$

Pour montrer que : $r\in F$ Il suffit de trouver un : $n'\in\mathbb{Z}$ tel que : $r=\frac{2n'-8}{6}$

$r=\frac{5n+2}{3}$ et $r=\frac{2n'-8}{6}$

Donc : $\frac{2n'-8}{6}=\frac{5n+2}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{2n'-8}{6}=\frac{10n+4}{6}$
Donc : $2n'-8=10n+4 \Leftrightarrow 2n'=10n+12 \Leftrightarrow n'=5n+6\in\mathbb{Z}$
Donc : Il suffit de prendre : $n'=5n+6\in\mathbb{Z}$ Par suite : $r\in F$
Conclusion : $E\subset F$

3) Comme : $-\frac{4}{3}\in F$ et $-\frac{4}{3}\notin E$ alors : $F\not\subset E$

Par suite : $E\neq F$

Exercice9 : Soit f l'application : $\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3+x\end{matrix}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $x^2+xy+y^2+1\succ 0$

2) Montrer que : f est injective

Solution :1) Soit $y\in\mathbb{R}$ (on le fixe)

L'équation : $x^2+xy+y^2+1\succ 0$ devient une équation dont la variable est x

$\Delta = y^2 - 4\times1\times\left(y^2+1\right) = y^2 - 4y^2 + -4 = -3y^2 - 4 = -\left(3y^2+4\right) \prec 0$

Le signe de : $x^2 + xy + y^2 + 1$ est celui de $a = 1$

Donc : $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ \ x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

2) Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $f(x_1) = f(x_2)$

Donc : $x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) + (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \ \ ou\ \ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0$

Comme : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$ alors $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \ \Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite : f est injective

Exercice10 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} \end{array}$

1) Montrer que : f n'est pas injective

2) a) Montrer que : $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

b) f est-elle surjective ? justifier

Solution : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

1) Montrons que : f n'est pas injective

On a : $f(0) = f(2) = \dfrac{1}{2}$ mais : $0 \neq 2$

Ceci signifie que l'application f n'est pas injective

2) a) Montrons que : $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

On montre par double inclusions.

$\subset)$ Soit $y \in f(\mathbb{R})$; il existe $x \in \mathbb{R}$; tel que : $f(x) = y$

On a : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1 + 1} = \dfrac{1}{(x-1)^2 + 1}$

Comme : $(x-1)^2 \geq 0$ alors : $(x-1)^2 + 1 \geq 1$

Donc : $0 \prec \dfrac{1}{(x-1)^2 + 1} \leq 1$ c'est-à-dire : $f(x) = y \in]0;1]$ c'est-à-dire : $f(\mathbb{R}) \subset]0;1]$

$\supset)$ Soit $y \in]0;1]$: Résolvons l'équation : $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} = y \Leftrightarrow 1 = y\left(x^2 - 2x + 2\right)$ Car : $x^2 - 2x + 2 \neq 0\ (\Delta \prec 0)$

$f(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2xy + 2y - 1 = 0$

Le discriminant Δ de l'équation est :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2y)^2 - 4y\times(2y-1) = 4y\times(1-y)$

On a : $y \in]0;1] \Rightarrow 0 \prec y \leq 1$ alors : $0 \leq 1 - y \prec 1$ Donc : $\Delta = 4y\times(1-y) \geq 0$

Donc l'équation f(x) = y admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$: Ceci signifie que : $y \in f(\mathbb{R})$

C'est-à-dire : $]0;1] \subset f(\mathbb{R})$ Par suite : $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

b) L'application f n'est pas surjective, car 2 n'a pas d'antécédent par f

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} h : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto x+\sqrt{x}+\frac{1}{4} \end{array}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$

2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x) = x+\sqrt{x}+\frac{1}{4} = x-\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $h = g \circ f$ avec : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x \mapsto \sqrt{x}+\frac{1}{2} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto x^2 \end{array}$

2)a) f est une bijection en effet : Soit $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-1}{2}$ Or $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc $2y-1 \geq 0$ donc : $x = \left(\frac{2y-1}{2}\right)^2$

Donc $x = \left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution

Donc : f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\begin{array}{l} f^{-1} : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en et : $\begin{array}{l} g^{-1} : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$

c) h est la composée de deux bijections f et g

Donc :h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right) = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est $\begin{array}{l} h^{-1} : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}$

Exercice12 : Soit l'ensemble :

$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / -y\le x\le y\}$ et soit l'application $f: \begin{array}{l} D\to\mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto(x^2+y^2\ ;\ 2xy)\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) f est-elle surjective ?

Solution : 1) Soit : $(x;y)$; $(x';y')\in D$ tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y')\Leftrightarrow(x^2+y^2\ ;\ 2xy)=(x'^2+y'^2\ ;\ 2x'y')$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=x'^2+y'^2 & (1)\\ 2xy=2x'y' & (2)\end{cases} \Rightarrow\begin{cases}x^2+2xy+y^2=x'^2+2x'y'+y'^2 & (1)+(2)\\ x^2-2xy+y^2=x'^2-2x'y'+y'^2 & (1)-(2)\end{cases}$

$\Rightarrow(x+y)^2=(x'+y')^2\ et\ (x-y)^2=(x'-y')^2 \Rightarrow|x+y|=|x'+y'|\ et\ |x-y|=|x'-y'|$

On a : $(x;y)$; $(x';y')\in D$

Donc : $-y\le x\le y$ et $-y'\le x'\le y'$

Donc : $0\le x+y\le 2y$ et $0\le x'+y'\le 2y'$

Et $2y\le x-y\le 0$ et $2y'\le x'-y'\le 0 \Rightarrow x+y=x'+y'\ et\ y-x=y'-x'$

$\Rightarrow x+y=x'+y'\ (3)\ et\ y-x=y'-x'\ (4)$

$(3)+(4)$ et $(3)-(4)\Rightarrow\begin{cases}2y=2y'\\2x=2x'\end{cases}\Rightarrow x=x'\ \ et\ \ y=y'\Rightarrow(x;y)=(x';y')$ Donc : f est injective

2) On remarque : $x^2+y^2\ge 0\quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Par exemple : $(-1;1)\in\mathbb{R}^2$ et n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x;y)=(-1;1)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien