1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P:\ (\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})\, x\le y\Rightarrow x^4\le y^4$

2) $Q:\ (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[)\, x\times y=1\Leftrightarrow x=y=1$

3) $R:\ (\forall x\in\mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

Exercice2 : 1) Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

Exercice3 : Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$; $a^2+b^2+c^2\prec 1\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{1}{abc}$

Exercice4 : Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$; $y\in\mathbb{R}^{*+}$; On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right):\ \frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$

2) Montrer que : $A\ge(a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9$

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}\notin\mathbb{N}$

Exercice6 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $2\times3^{n-1}+5^n+1$ est un multiple de 8

2)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ $S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

Exercice7 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{Z}: \frac{8n+2025}{10}\notin\mathbb{Z}$

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ 3\frac{x}{2}-1\succ-\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5}$

Exercice9 : On considère les deux ensembles suivants : $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\frac{2x+16}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$ et

$B=\left\{x\in\mathbb{Z}-\{-1\}/\frac{x^3-x+6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{-1\});\frac{x^3-x+6}{x+1}=x^2-x+\frac{6}{x+1}$

2) Déterminer : A ; B ; $A\cap B$; $A-B$ et $A\cup B$ en extension

Exercice10 : Soit E un ensemble et F et G deux parties de E.
Démontrer que :
1) $F\subset G\Leftrightarrow F\cup G=G$
2) $F\subset G\Leftrightarrow F\cap C_E^G=\emptyset$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.
1) Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
2) Monter que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C\subset B-C\end{cases}\Leftrightarrow A\subset B$
3)Monter que : $A\cup B=B\cap C\Leftrightarrow A\subset B\subset C$ ou : $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$
4)Monter que : $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

Exercice12 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}:\left]2;+\infty\right[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$

1)Montrer que : f est injective

2)l'application $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$ est-elle injective ? justifier

Exercice13 : Soit L'application f : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x^2-6x+5\end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$
2) f est-elle surjective ?
3) f est-elle injective ? justifier
4) Déterminer : $f\left(\left[1;+\infty\right[\right)$ et $f^{-1}\left([2;11]\right)$

Exercice14 :1) Montrer que : $\forall x\in[-1;0]$; $1\le 2\sqrt{x+1}-x\le 2$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l}f:[-1;0]\to[1;2]\\ x\mapsto 2\sqrt{x+1}-x\end{array}$

a) Vérifier que : $\forall x\in[-1;0]$; $f(x)=2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

b) Montrer que f : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien