http://www.xriadiat.com **DL1: O** **PROF: ATMANI NAJIB**

# 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

## *Correction :* Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

**Exercice1 :** Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P: \ (\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\, x \leq y \Rightarrow x^4 \leq y^4$

2) $Q: \ (\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[)\, x \times y = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

3) $R: \ (\forall x \in \mathbb{R}^+)\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1$

**Solution :** 1) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

$\overline{P}: \ (\exists x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R})\, x \leq y \ et \ x^4 \succ y^4$

$(\exists x = -2 \in \mathbb{R});(\exists y = -1 \in \mathbb{R}) -2 \leq -1 \ et \ (-2)^4 = 16 \succ (-1)^4 = 1$

On a : $\overline{P}$ est vraie car par suite : $P$ est une proposition fausse.

2) $Q: \ (\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[) : x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$

Soit : $(x;y) \in ([1.+\infty[)^2$

Montrons : $x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$

Supposons : $x \times y = 1$ et Montrons : $x=1$ et $y=1$

Par l'absurde Supposons : $x \neq 1$ ou $y \neq 1$

puisque $(x;y) \in ([1.+\infty[)^2$ alors : $x \succ 1$ ou $y \succ 1$ et donc : $xy \succ 1$ absurde

Donc : $x = y = 1$

Donc : $Q : (\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[) : x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$ est vraie

$\overline{Q}: \ (\exists x \in [1.+\infty[);(\exists y \in [1.+\infty[) : x \times y = 1 \ et ( \ x \neq 1 \ ou \ y \neq 1)$

3) $R: \ (\forall x \in \mathbb{R}^+)\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$

$\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1 + 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1$

Donc : $R$ est vraie

**Exercice2 :** 1) Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right) : a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ Montrer que : $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$

**Solution :** 1)a) $\Rightarrow$:Montrons que

$\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right) : a+b=0 \Rightarrow a=0$ et $b=0$ ?

Supposons que ; $a+b=0$ et ( $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ) et $(a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$ contradiction par suite : $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+}\right)^{2}\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1\geq 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

**Exercice3 :** Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)^{3}$ ; $a^2+b^2+c^2\prec 1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{1}{abc}$

**Solution :** Nous raisonnons par contraposition : Soit : $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)^{3}$

Montrons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Supposons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$

On a : $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$; (vraie) $\Rightarrow\left(a^2-2a\times b+b^2\right)+\left(a^2-2a\times c+c^2\right)+\left(b^2-2b\times c+c^2\right)\geq 0$

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a\times b-2a\times c-2b\times c\geq 0$

$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(a\times b+a\times c+b\times c\right)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$ Comme on a : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$

$\Rightarrow abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{abc}abc \Rightarrow bc+ac+ab=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Donc : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Alors : par contraposition : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)^{3}$ ; $a^2+b^2+c^2\prec 1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{1}{abc}$

**Exercice4 :** Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ; $y\in\mathbb{R}^{*+}$ ; On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ ; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrer que : $A\geq(a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

**Solution :** 1) a) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}$

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 0 \Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

2) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

On a : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ et puisque : $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^{*+}$ on appliquant cette inégalité

On a donc : $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ donc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ et comme : $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

Alors : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrons que : $A\geq(a+1)^2$

On a : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$ et comme : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{xy}$

Donc : $1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}\geq 1+2a+a^2$ c'est-à-dire : $A\geq(a+1)^2$

3) Déduisons que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

On a : $A\geq(a+1)^2$ c'est-à-dire : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq(a+1)^2$

Or on a : $x+y=1$ et $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ donc : $\frac{1}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 2\Rightarrow a\geq 2$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq(a+1)^2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq(2+1)^2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

**Exercice5 :** 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ :L'ensemble des restes de la division euclidienne de $n^2$ par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$ ; $\sqrt{5k+12}\notin\mathbb{N}$

**Solution : 1)** Soit $n\in\mathbb{N}$

On a : 5 cas possibles seulement pour n.

$n=5k$ ou $n=5k+1$ ou $n=5k+2$ ou $n=5k+3$ ou $n=5k+4$ avec $k\in\mathbb{N}$

<u>1$^{ére}$cas :</u> $n=5k$ alors $n^2=(5k)^2=25k^2=5\times(5k^2)=5k'=5k'+0$

Donc : 0 est le reste de la division euclidienne de $n^2$ Par 5

<u>2$^{ére}$cas :</u> $n=5k+1$ alors $n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5\times(5k^2+2k)+1=5k'+1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de $n^2$ Par 5

<u>3$^{ére}$cas :</u> $n=5k+2$ alors $n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5\times(5k^2+4k)+4=5k'+4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de $n^2$ Par 5

<u>4$^{ére}$cas :</u> $n=5k+3$ alors $n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=(25k^2+30k+5)+4$

$n^2=(5k+3)^2=5\times(5k^2+6k+1)+4=5k'+4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de $n^2$ Par 5

<u>5$^{ére}$cas :</u> $n=5k+4$ alors $n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=(25k^2+40k+15)+1$

$n^2=(5k+4)^2=5\times(5k^2+8k+3)+1=5k'+1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de $n^2$ Par 5

Donc : L'ensemble des restes de la division euclidienne de $n^2$ Par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant : $\exists k\in\mathbb{N}$ ; $\sqrt{5k+12}\in\mathbb{N}$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$ ; $\sqrt{5k+12}=n$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$ ; $5k+12=n^2$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$ ; $5k+10+2=n^2$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$ ; $5(k+2)+2=n^2$

Donc : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que 2 est le reste de la division euclidienne de $n^2$ Par 5

Nous obtenons donc une contradiction avec la faite que : L'ensemble des restes de la division euclidienne de $n^2$ par 5 est : $E=\{0;1;4\}$ car 2 ne peut pas être le reste de la division euclidienne de $n^2$ par 5

**Exercice6** : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $2\times3^{n-1}+5^n+1$ est un multiple de 8

2)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ $S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

**Solution :** 1) 1étapes : l'initialisation : Pour n =1 nous avons : $2\times3^{1-1}+5^1+1=2+5+1=8$
et $8$ est un multiple de 8

Donc P (1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit : $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/2\times3^{n-1}+5^n+1=8k$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}/5^n=8k-2\times3^{n-1}-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/2\times3^n+5^{n+1}+1=8k'$ ??

$2\times3^n+5^{n+1}+1=2\times3^n+5^n\times5^1+1=2\times3^n+(8k-2\times3^{n-1}-1)\times5^1+1$

$2\times3^n+5^{n+1}+1=2\times3^n+8k\times5-10\times3^{n-1}-5+1=6\times3^{n+1}+8k\times5-10\times3^{n-1}-4$

$2\times3^n+5^{n+1}+1=8k\times5-4(3^{n-1}+1)$ or 3 est impair donc : $3^{n-1}$ est aussi impair et donc : $3^{n-1}+1$ est pair

C'est-à-dire : $\exists k'\in\mathbb{N}/3^{n-1}+1=2k'$

Donc : $2\times3^n+5^{n+1}+1=8k\times5-4\times2k'$

Par suite : $2\times3^n+5^{n+1}+1=8k\times5-8k'=8(5k-k')=8k''$ avec $k''=5k-k'\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $2\times3^{n-1}+5^n+1$ est un multiple de 8

2) Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $S_0=\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k a^k=(-1)^0 a^0=1$ et $\frac{a^1+1}{a+1}=1$

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1} = \dfrac{a^{2n+3}+1}{a+1}$ ??

On a : $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=2n+2} (-1)^k a^k = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k + (-1)^{2n+1} a^{2n+1} + (-1)^{2n+2} a^{2n+2}$

Remarque : $(-1)^{2n+2} = 1$ car $2n+2$ pair et $(-1)^{2n+1} = -1$ car $2n+1$ impair

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n = \dfrac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

Donc : $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=2n+2} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+1}+1}{a+1} - a^{2n+1} + a^{2n+2} = \dfrac{a^{2n+1}+1-a^{2n+1}(a+1)+a^{2n+2}(a+1)}{a+1}$

$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=2n+2} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+1}+1-a^{2n+2}-a^{2n+1}+a^{2n+3}+a^{2n+2}}{a+1} = \dfrac{a^{2n+3}+1}{a+1}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$

$S_n = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

**Exercice7 :** Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{Z}: \dfrac{8n+2025}{10} \notin \mathbb{Z}$

**Solution :** Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\dfrac{8n+2025}{10} \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{Z}$ et $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que : $\dfrac{8n+2025}{10} = m$

$\dfrac{8n+2025}{10} = m \Leftrightarrow 8n+2025 = 10m \Rightarrow 2025 = 10m - 8n \Rightarrow 2025 = 2(5m-4n) \Rightarrow 2025 = 2k$ avec $k = 5m-4n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2025$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 2025 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{4n+2026} \notin \mathbb{N}$

**Exercice8 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ 3\dfrac{x}{2} - 1 \succ -\sqrt{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 5}$

**Solution :** On va Opérer par disjonction de cas : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation :

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 5 \geq 0 \right\}$ : $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 5$ : le discriminant du trinôme est : $\Delta = \dfrac{9}{4} - 4 \times \dfrac{1}{2} \times 5 = -\dfrac{31}{4} \prec 0$

Dans ce cas, le trinôme a toujours le signe du coefficient de $x^2$ : , donc strictement positif, et la Condition d'existence est toujours vérifiée. Le domaine de l'inéquation est $D = \mathbb{R}$

Pour la résolution, envisageons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $3\dfrac{x}{2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3}$ : Le premier membre de l'inégalité est positif tandis que le second est strictement négatif. L'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x telles que : $x \geq \dfrac{2}{3}$

Donc : $S_1 = \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$

<u>Second cas : Si</u> : $3\frac{x}{2}-1 \prec 0 \Leftrightarrow x \prec \frac{2}{3}$ : Les deux membres de l'inégalité sont négatifs. Pour progresser, il faut élever au carré les deux Membres de l'inéquation. Mais alors, il faut « retourner » l'inégalité !

Nous obtenons donc : $\left(3\frac{x}{2}-1\right)^2 \prec \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5$ Développons …

$\frac{9x^2}{2}-3x+1 \prec \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5 \Leftrightarrow \frac{7x^2}{4}-\frac{3x}{2}-4 \prec 0$ Nous sommes ramenés à une inéquation du second degré :

le discriminant du trinôme est : $\Delta=\frac{9}{4}-4\times\frac{7}{4}\times(-4)=\frac{121}{4}$

Donc : $x_1=\frac{\frac{3}{2}-\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}}$ et $x_2=\frac{\frac{3}{2}+\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}}$ c'est-à-dire : $x_1=-\frac{8}{7}$ et $x_2=2$

Dressons le tableau de signes du trinôme, sans oublier d'y insérer la valeur $x=\frac{2}{3}$ puisqu'il faut tenir compte du fait que $x \prec \frac{2}{3}$

| $x$ | | $-\frac{8}{7}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{7x^2}{4}-\frac{3}{2}x-4$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |

Le trinôme est strictement négatif lorsque : $-\frac{8}{7} \prec x \prec \frac{2}{3}$ donc : $S_2=\left]-\frac{8}{7};\frac{2}{3}\right[$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left[\frac{2}{3};+\infty\right[ \cup \left]-\frac{8}{7};\frac{2}{3}\right[ = \left]-\frac{8}{7};+\infty\right[$

**Exercice9** : On considère les deux ensembles suivants : $A=\left\{x\in\mathbb{N} / \frac{2x+16}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}-\{-1\} / \frac{x^3-x+6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{-1\}); \frac{x^3-x+6}{x+1}=x^2-x+\frac{6}{x+1}$

2) Déterminer : $A$ ; $B$ ; $A\cap B$ ; $A-B$ et $A\cup B$ en extension

**Solution : 1) 1)** soit : $x\in\mathbb{Z}-\{-1\}$

$$x^2-x+\frac{6}{x+1}=\frac{(x^2-x)(x+1)+6}{x+1}=\frac{x^3+x^2-x^2-x+6}{x+1}=\frac{x^3-x+6}{x+1}$$

2) a) Détermination de : $A$ ? $A=\left\{x\in\mathbb{N} / \frac{2x+16}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{N}$ :

$$\frac{2x+16}{x+2}=\frac{2x+4+12}{x+2}=\frac{2x+4}{x+2}+\frac{12}{x+2}=2+\frac{12}{x+2}$$

$x\in A \Leftrightarrow 2+\frac{12}{x+2}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{12}{x+2}\in\mathbb{N}$ Car $\frac{12}{x+2}\geq 0$

$x\in A \Leftrightarrow x\neq -2 \ et \ x+2 \ divise \ 12$

$\Leftrightarrow x+2\in\{1;2;3;4;6;12\} \Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4;10\}$

Donc : $A=\{0;1;2;3;4;10\}$

b) Détermination de $B$ en extension : On a : $B=\left\{x\in\mathbb{Z}-\{-1\} / x^2-x+\frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit : $x\in\mathbb{Z}-\{-1\}$ :

$x\in B \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}-\{-1\}\ \ et\ \ x^2-x+\frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}-\{-1\}\ \ et\ \ \frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x+1\ divise\ \ 6$

$\Leftrightarrow x+1\in\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\} \Leftrightarrow x\in\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$

Donc : $B=\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$

Détermination de : $A\cap B$ ; $A-B$ et $A\cup B$ ?

On a : $A=\{0;1;2;3;4;10\}$ et $B=\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$

Donc : $A\cap B=\{0;1;2\}$

$A-B=\{3;4;10\}$

$A\cup B=\{0;1;2;3;4;10;-7;-3;-2;5\}$

**Exercice10** : Soit $E$ un ensemble et $F$ et $G$ deux parties de $E$.
Démontrer que :
1) $F\subset G \Leftrightarrow F\cup G=G$
2) $F\subset G \Leftrightarrow F\cap C_E^G=\emptyset$

**Solution :** 1) Supposons que $F\subset G$. Si $x\in F\cup G$
Alors $x\in F\subset G$ ou $x\in G$ alors $x\in G$.
Donc $F\cup G\subset G$. Si $x\in G$ alors $x\in F\cup G$,
Par conséquent $F\cup G=G$.
On a montré que $F\subset G\Rightarrow F\cup G=G$
Supposons que $F\cup G=G$.
Soit $x\in F$, $x\in F\cup G=G$ donc $x\in G$.
On a montré que $F\cup G=G\Rightarrow F\subset G$.
Finalement $F\subset G\Leftrightarrow F\cup G=G$.
2) Supposons que $F\subset G$.
Si $x\in F\cap CEG$, $x\in F$ et $x\notin G\supset F$
Donc $x\in F$ et $x\notin F$ ce qui est impossible par conséquent $F\cap CEG=\emptyset$.
On a montré que $F\subset G\Rightarrow F\cap CEG=\emptyset$
Supposons que $F\cap CEG=\emptyset$.
Soit $x\in F$, supposons que $x\notin G\Leftrightarrow x\in CEG$
Ce qui signifie que $x\in F\cap CEG=\emptyset$, c'est impossible donc l'hypothèse $x\notin G$ est fausse,
Par conséquent $x\in G$ et $F\subset G$.
On a montré que $F\cap CEG=\emptyset\Rightarrow F\subset G$.
Finalement $F\subset G\Leftrightarrow F\cap CEG=\emptyset$

**Exercice11 :** Soient $A$ ; $B$ ; $C$ des parties d'un ensemble E.

1) Monter que : $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

2) Monter que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases} \Leftrightarrow A\subset B$

3)Monter que : $A\cup B=B\cap C \Leftrightarrow A\subset B\subset C$ ou : $A\cup B=A\cap C \Leftrightarrow B\subset A\subset C$

4)Monter que : $A=B \Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

**Solution :** 1) Montrons que : $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

$\Rightarrow)$ On suppose que : $A\cap B=A\cap C$

Montrons que : $A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

$\subset)$ Montrons que : $A\cap \overline{B}\subset A\cap \overline{C}$

✓ Soit $x\in A\cap \overline{B}$ montrons que $x\in A\cap \overline{C}$ ?

$x\in A\cap \overline{B} \Rightarrow x\notin B \text{ et } x\in A \Rightarrow x\notin A\cap B \Rightarrow x\notin A\cap C$

$\Rightarrow x\notin C$ car : $x\in A$

C'est-à-dire : $x\in A\cap \overline{C}$

$\supset)$ De même on Montre que : $A\cap \overline{C}\subset A\cap \overline{B}$

Donc : $A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

Par suite : $A\cap B=A\cap C \Rightarrow A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

Montrons que : $A\cap B=A\cap C$

✓ Soit $x\in A\cap B$ montrons que $x\in A\cap C$ ?

$x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \text{ et } x\in B \Rightarrow x\in A \text{ et } x\notin \overline{B} \Rightarrow x\notin A\cap \overline{B} \Rightarrow x\notin A\cap \overline{C}$

$\Rightarrow x\notin \overline{C}$ car : $x\in A$

$\Rightarrow x\in C$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\in A\cap C$

Donc : $A\cap B\subset A\cap C$

✓ De même on Montre que : $A\cap C\subset A\cap B$

Par suite : $A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C} \Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Conclusion : $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap \overline{B}=A\cap \overline{C}$

**2)** $\Rightarrow)$ On suppose que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

Montrons que $A\subset B$ ???

Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A\subset B$, on montre que :

$x\in A \Rightarrow x\in B$

Soit : $x\in A \Rightarrow x\in A-C$ ou $x\in A\cap C$

Car : $A=(A-C)\cup(A\cap C)$

$\Rightarrow x\in B-C$ ou $x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in B$ ou $x\in B$

$\Rightarrow x\in B$

Donc : $A\subset B$

Par suite : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases} \Rightarrow A\subset B$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $A\subset B$

Montrons que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$ ???

a) Montrons que : $A\cap C\subset B\cap C$

Soit : $x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\in C$

$\Rightarrow x\in B \text{ et } x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C$

Donc : $A\cap C\subset B\cap C$

b) Montrons que : $A-C\subset B-C$

Soit : $x\in A-C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\notin C$

$\Rightarrow x\in B \text{ et } x\notin C$

$\Rightarrow x\in B-C$

Donc : $A-C\subset B-C$

En déduit donc que : $A\subset B\Rightarrow \begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

Conclusion : $A\subset B\Leftrightarrow \begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

3)Montrons que : $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$

Démontrons par double implication.

<u>Methode1 : Remarque :</u> on a le résultat suivant :

$A\subset A\cup B \text{ et } B\subset A\cup B$

Aussi on a : $A\cap B\subset A \text{ et } A\cap B\subset B$

$\Rightarrow$) On suppose que : $A\cup B=A\cap C$

On a : $A\cup B=A\cap C\Rightarrow A\cup B\subset A$ et $A\cup B\subset C$

$\Rightarrow B\subset A$ et $A\subset C$

$\Rightarrow B\subset A\subset C$

Donc : $A\cup B=A\cap C\Rightarrow B\subset A\subset C$

$\Leftarrow$) On suppose que : $B\subset A\subset C$

On a : $B\subset A\subset C\Rightarrow B\subset A$ et $A\subset C$

$\Rightarrow A\cup B=A$ et $A\cap C=A\Rightarrow A\cup B=A\cap C$

Donc : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

<u>Methode2 : Remarque :</u>

Pour montrer que $A\subset B$, on montre que :

$x\in A\Rightarrow x\in B$

$\Rightarrow$) On suppose que : $A\cup B=A\cap C$

Montrons que : $B\subset A\subset C$ ?

C'est à dire Montrons que : $B\subset A$ et $A\subset C$

✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in A$ ?

$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap C$

C'est-à-dire : $x\in A$: Ceci signifie que : $B\subset A$ ❶

✓ Soit $x\in A$ montrons que $x\in C$ ?

$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap C$

C'est-à-dire : $x\in C$: Ceci signifie que : $A\subset C$ ❷

On a : ❶ et ❷ $\Rightarrow B\subset A\subset C$

Donc : $A\cup B=A\cap C\Rightarrow B\subset A\subset C$

$\Leftarrow$) On suppose que : $B\subset A\subset C$

On a : $B\subset A\subset C\Rightarrow B\subset A$ et $A\subset C$

Montrons que : $A\cup B=A\cap C$ ?
C'est-à-dire : Montrons que :
$A\cup B\subset A\cap C$ et $A\cap C\subset A\cup B$
Montrons que : $A\cup B\subset A\cap C$ ?
✓ Soit $x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\ ou\ x\in B\ \Rightarrow x\in A\ ou\ x\in A\Rightarrow x\in A$
$\Rightarrow x\in C\ ou\ x\in C\Rightarrow x\in C$
$\Rightarrow x\in A$ et $x\in C\Rightarrow x\in A\cap C$
C'est-à-dire : $A\cup B\subset A\cap C$ ❶
Montrons que : $A\cap C\subset A\cup B$ ?
✓ Soit $x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\ et\ x\in C\ \Rightarrow x\in A\cup B$
C'est-à-dire : $A\cap C\subset A\cup B$ ❷
On a : ❶ et ❷ $\Rightarrow A\cup B=A\cap C$
4)Démontrons la double implication.
$\Rightarrow$) Évident.
Car : si $A=B$
Alors : $A\cap A=A\cup A=A$
$\Leftarrow$) On suppose que : $A\cap B=A\cup B$
et on montre que : $A=B$
✓ Soit $x\in A$ montrons que $x\in B$ ?
$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap B$
C'est-à-dire : $x\in B$: Ceci signifie que : $A\subset B$ ①
✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in A$ ?
$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap B$
C'est-à-dire : $x\in A$: Ceci signifie que : $B\subset A$ ②
D'après ① et ② on en déduit que : $A=B$
Conclusion : $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

**Exercice12 :** Soit $f$ l'application : $\begin{array}{l} :\left]2;+\infty\right[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$

1)Montrer que : $f$ est injective

2)l'application $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$ est-elle injective ? justifier

**Solution :** Montrons que : $f$ est injective : Soient $x_1\in\left]2;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]2;+\infty\right[$

Montrons que : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ?

Supposons que : $f(x_1)=f(x_2)$

Donc : $\dfrac{\sqrt{x_1}}{x_1+2}=\dfrac{\sqrt{x_2}}{x_2+2}\Rightarrow (x_2+2)\sqrt{x_1}=(x_1+2)\sqrt{x_2}\Rightarrow x_2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_1}=x_1\sqrt{x_2}+2\sqrt{x_2}$

$\Rightarrow x_2\sqrt{x_1}-x_1\sqrt{x_2}+2\sqrt{x_1}-2\sqrt{x_2}=0\Rightarrow\sqrt{x_1x_2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)-2\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)=0\Rightarrow\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_1x_2}-2\right)=0$

$\Rightarrow\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=0\ ou\ \sqrt{x_1x_2}-2=0\Rightarrow\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1}\ ou\ \sqrt{x_1x_2}=2\Rightarrow x_2=x_1\ ou\ x_2x_1=4$

Or : $x_1\in\left]2;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]2;+\infty\right[$ donc : $x_2x_1\succ 4\Rightarrow x_2x_1\neq 4$

Donc : $\frac{\sqrt{x_1}}{x_1+2}=\frac{\sqrt{x_2}}{x_2+2}\Rightarrow x_2=x_1$ Par suite : $f$ est injective

2) Montrons que : $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$ n'est pas injective

On prend : $x_1=1\ et\ \ x_2=4$ : $g(1)=\frac{\sqrt{1}}{1+2}=\frac{1}{3}$ et $g(4)=\frac{\sqrt{4}}{4+2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

On a donc : $1\neq 4$ mais : $g(1)=g(4)$

Ceci signifie que l'application $g$ n'est pas injective

**Exercice13 :** Soit L'application f : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x^2-6x+5\end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

**Solution :1)** $f(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+5=0$

$\Delta=(-6)^2-4\times3\times5=36-60=-24\prec 0$ Donc : $S=\varnothing$

2) $f(x)=0$ n'a pas de solutions donc $0\in\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est est-pas surjective

3) Méthode : pour les fonctions : $f(x)=ax^2+bx+c$

$5=c\in\mathbb{R}$ (Ensemble d'arrivé) : on Recoud l'équation $f(x)=5$

$f(x)=5\Leftrightarrow 3x^2-6x+5=5\Leftrightarrow x(3x-6)=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x=2$

Donc : $f(0)=5=f(2)$ mais $0\neq 2$

Donc : f n'est pas injective

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

a) $f([1;+\infty[)=?$

$f(x)=3x^2-6x+5$ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$f(x)=3x^2-6x+5=3(x^2-2x)+5=3((x-1)^2-1)+5=3(x-1)^2-3+5=3(x-1)^2+2$

Remarque : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ et $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$f([1;+\infty[)=\{f(x)/x\in[1;+\infty[\}$

$x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq1\Leftrightarrow x-1\geq0\Leftrightarrow(x-1)^2\geq0\Leftrightarrow 3(x-1)^2\geq0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+2\geq2\Leftrightarrow f(x)\geq2$

$x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow f(x)\in[2;+\infty[$

$f([1;+\infty[)=[2;+\infty[$

b) $f^{-1}([2;11])$

$f^{-1}([2;11]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [2;11]\}$

$x \in f^{-1}([2;11]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $2 \leq f(x) \leq 11 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $2 \leq 3(x-1)^2 + 2 \leq 11 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $0 \leq 3(x-1)^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow 0 \leq |x-1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq \sqrt{3}$ *ou* $0 \leq -x+1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{3}+1$ *ou* $-1 \leq -x \leq \sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{3}+1$ *ou* $1-\sqrt{3} \leq x \leq 1$

$x \in f^{-1}([2;11]) \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{3}+1$ *ou* $1-\sqrt{3} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[1;\sqrt{3}+1\right]$ *ou* $x \in \left[1-\sqrt{3};1\right]$

Donc : $f^{-1}([5;10]) = \left[1-\sqrt{3};1\right] \cup \left[1;\sqrt{3}+1\right] = \left[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right]$

**Exercice14 :**1) Montrer que : $\forall x \in [-1;0]$ ; $1 \leq 2\sqrt{x+1} - x \leq 2$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[-1;0] \to [1;2] \\ x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$

a) Vérifier que : $\forall x \in [-1;0]$ ; $f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

b) Montrer que $f$ : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque $f^{-1}$

**Solution :** 1) Montrons que : $\forall x \in [-1;0]$ ; $1 \leq 2\sqrt{x+1} - x \leq 2$

Soit $x \in [-1;0]$

$1 \leq 2\sqrt{x+1} - x \leq 2 \Leftrightarrow 1 + x \leq 2\sqrt{x+1} \leq 2 + x$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 \leq \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \leq (2+x)^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 - 4(x+1) \leq 0$ et $(2+x)^2 - 4(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(1+x-4) \leq 0$ et $x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(x-3) \leq 0$ et $x^2 \geq 0$

Comme : $x \in [-1;0]$ alors : $-1 \leq x \leq 0$

Donc : $0 \leq x+1 \leq 1$ et $-4 \leq x-3 \leq -3$

On a donc : $(1+x)(x-3) \leq 0$ et $x^2 \geq 0$ (vraie)

Par suite : $\forall x \in [-1;0]$ ; $1 \leq 2\sqrt{x+1} - x \leq 2$.

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[-1;0] \to [1;2] \\ x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$

a) Vérifions que : $\forall x \in [-1;0]$ ; $f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x = 1 + 2\sqrt{x+1} - x - 1$

$= 1 + 2\sqrt{x+1} - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 2 - \left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\sqrt{x+1} + 1\right) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

b) Montrons que $f$ : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque $f^{-1}$.

Soit $y \in [1;2]$;

Résolvons dans : $[-1;0]$; l'équation : $f(x) = y$

$f(x)=y \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}-x=y \Leftrightarrow 2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=y$

$\Leftrightarrow 2-y=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1}-1\right|=\sqrt{2-y}$ Car $2-y\geq 0$

$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\sqrt{2-y}$ Puisque $x\in[-1;0]$; et donc : $\sqrt{x+1}-1\leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1-\sqrt{2-y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2$

Car : $-2\leq -y\leq -1 \Rightarrow 0\leq 2-y\leq 1 \Rightarrow 0\leq \sqrt{2-y}\leq 1 \Rightarrow -1\leq -\sqrt{2-y}\leq 0$

$\Rightarrow 0\leq 1-\sqrt{2-y}\leq 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2 \Leftrightarrow x+1=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow x=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2-1$

Comme : $x=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2-1\in[-1;0]$

Ceci signifie que l'application f est bijective.

Sa réciproque est l'application $f^{-1}$ définie par :

$$f^{-1}:[1;2]\rightarrow[-1;0]$$

$$x\mapsto\left(1-\sqrt{2-x}\right)^2-1$$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*