http://www.xriadiat.com **DL1: N** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P:\ (\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})\, x\le y\Rightarrow x^2\le y^2$

2) $Q:\ (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[)\, x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

3) $R:\ (\forall x\in\mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

4) $T:\ (\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R})/\ a^2+2b^2\succ 4ab$

Exercice2 : Soients a et b deux réels

Montrer que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]\Rightarrow \frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Exercice3 : Montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}^+$

$a^4+8a^3+18a^2+8a\succ 3\ \Rightarrow a+2\succ\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}$

Exercice 4 : 1) Montrer que :

1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ n^2+n+1$ est un nombre impair.

2) $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0$

3) $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$

Exercice 5 : Soit : $(a;b;c)\in(\mathbb{R}^{+*})^3$ tel que : $a+b+c=1$

1) Montrer que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2\ ;\ \frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$

2) Déduire que : $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$

3) Montrer que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I_1):\ \sqrt{5x^2+1}\succ 2x-1$

Exercice7 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Exercice8 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ n^2+1$ n'est pas un carré parfait.

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{4n^2+5n+3}\notin\mathbb{N}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrer que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.

Exercice9 : Soit l'ensemble : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+xy-2y^2+5=0\}$

1) a) Vérifier que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2: x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) Montrer que : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants : $A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

3) On pose : $A=\{x\in\mathbb{R}/|2x|+|x-5|\leq 3\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R}/|3x-5|\leq 3\}$

a) Montrons donc que : $A\subset B$?

b) Donner Le complémentaire de l'ensemble B

Exercice10 : Soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1) Déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2) Déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3) Déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

4) Monter que : $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \text{ ou } B=\varnothing$

Exercice11 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 2) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2]\\ x\mapsto x^2\end{array}$

Exercice12 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}$

1)Montrer que : f est injective

2)l'application $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}$ est-elle injective ? justifier

Exercice13 : Soit les applications : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to]0;1]\\ x\mapsto\frac{1}{x^2-2x+2}\end{array}$ et $\begin{array}{l}g:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\\ n\mapsto\frac{1}{n^2-2n+3}\end{array}$

1)Montrer que f est surjective

2) g est-elle injective ? justifier

Exercice14 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:]-2;+\infty[\to]-\infty;4[\\ x\mapsto\frac{4x}{x+2}\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

4) a) Vérifier que : $\forall x\in]-2;+\infty[\ f(x)=4-\frac{8}{x+2}$

b) Déterminer : $f([0;+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty;2[)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien