http://www.xriadiat.com **DL1: N** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P:\ (\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})\,x\le y\Rightarrow x^2\le y^2$

2) $Q:\ (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[)\,x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

3) $R:\ (\forall x\in\mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

4) $T:\ (\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R})/\,a^2+2b^2\succ 4ab$

Solution :1) $\overline{P\Rightarrow Q}\Leftrightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}\Leftrightarrow P\wedge\overline{Q}$

$\overline{P}:\ (\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})\,x\le y\ et\ x^2\succ y^2$

$(\exists x=-2\in\mathbb{R});(\exists y=-1\in\mathbb{R})-2\le -1\ et\ (-2)^2\succ(-1)^2$

On a : $\overline{P}$ est vraie car par suite : P est une proposition fausse.

2) $Q:\ (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[):x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

Soit : $(x;y)\in([1.+\infty[)^2$

Montrons : $x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

Supposons : $x\times y=1$ et Montrons : $x=1$ et $y=1$

Par l'absurde Supposons : $x\neq 1$ ou $y\neq 1$

puisque $(x;y)\in([1.+\infty[)^2$ alors : $x\succ 1$ ou $y\succ 1$ et donc : $xy\succ 1$ absurde

Donc : $x=y=1$

Donc : $Q:(\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[):x\times y=1\Rightarrow x=y=1$ est vraie

$\overline{Q}:\ (\exists x\in[1.+\infty[);(\exists y\in[1.+\infty[):x\times y=1\ et\,(\ x\neq 1\ ou\ y\neq 1)$

3) $R:\ (\forall x\in\mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}\ge 0$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow x+1\ge 1\Rightarrow\sqrt{x+1}\ge\sqrt{1}\Rightarrow\sqrt{x+1}\ge 1$

$\sqrt{x}\ge 0$ et $\sqrt{x+1}\ge 1\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1+0\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 1$

Donc : R est vraie

4) $T:\ (\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R})/\,a^2+2b^2\succ 4ab$

Soit : $a\in\mathbb{R}$ (fixe) : $a^2+2b^2\succ 4ab$ signifie que : $2b^2-4ab+a^2\succ 0$ (considérer comme une inéquation du 2 ieme degré avec variable $b\Rightarrow\Delta=16a^2-8a^2=8a^2\ge 0\Rightarrow$ l'inéquation admet au moins une solution. (Faire un tableau de signe)

$(\exists b\in\mathbb{R})/\,a^2+2b^2\succ 4ab$ est vraie.

Donc : T est une proposition vraie

Exercice2 : Soient a et b deux réels

Montrer que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]\Rightarrow \frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Solution : 1) $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le 2$

Et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le 2$

Donc : $2\le 2+a\le 4$ et $2\le 2+b\le 4$

Par suite : $4\le(2+b)(2+a)\le 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b|\ge 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Exercice3 : Montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}^{+}$

$a^4+8a^3+18a^2+8a\succ 3\Rightarrow a+2\succ\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}$

Solution : Soit $a\in\mathbb{R}^{+}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a+2\le\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}\Rightarrow a^4+8a^3+18a^2+8a\le 3$?

$a+2\le\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}\Rightarrow(a+2)^2\le\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}^{\,2}\Rightarrow a^2+4a+4\le 3+\sqrt{5-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a^2+4a+1\le 1\sqrt{5-\sqrt{2}}\Rightarrow\left(a^2+4a+1\right)^2\le 1\sqrt{5-\sqrt{2}}^{\,2}\Rightarrow a^4+16a+1+8a^3+8a+2a^2\le 5-\sqrt{2}\le 3$

Donc : $a+2\le\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}\Rightarrow a^4+8a^3+18a^2+8a\le 3$

Alors : Par contraposition : : $\forall a\in\mathbb{R}^{+}$ $a^4+8a^3+18a^2+8a\succ 3\Rightarrow a+2\succ\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}$

Exercice 4 : 1) Montrer que :

1) $\forall n\in\mathbb{N}:n^2+n+1$ est un nombre impair.

2) $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0$

3) $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$

Solution : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$.

<u>Premier cas :</u> si n est pair : $\exists k\in\mathbb{N}:n=2k$

$n^2+n+1=(2k)^2+2k+1=4k^2+2k+1=2(2k^2+k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

<u>2 iem cas :</u> si n est impair : $\exists k\in\mathbb{N}:n=2k+1$

$n^2+n+1=(2k+1)^2+2k+1+1=4k^2+4k+1+2k+1+1=2(2k^2+3k+1)+1=2k'+1$

avec $k'=2k^2+3k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall n\in\mathbb{N}:n^2+n+1$ est un nombre impair.

2) Montrons par disjonction des cas que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\succ-\frac{1}{2}(x+2)$

<u>Premier cas :</u> si $x+2\succ 0$ c'est-à-dire ; $x\succ -2$ donc : $-\frac{1}{2}(x+2)\prec 0$

Alors **:** $\sqrt{x^2+1}\succ-\frac{1}{2}(x+2)$ car $\sqrt{x^2+1}\succ 0$ et $-\frac{1}{2}(x+2)\prec 0$

<u>2 ieme cas :</u> si $x+2\le 0$ c'est-à-dire ; $x\le -2\Rightarrow-\frac{1}{2}(x+2)\ge 0$

$\sqrt{x^2+1}\succ-\frac{1}{2}(x+2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\succ\frac{1}{4}(x+2)^2$

$\Leftrightarrow 4(x^2+1)\succ x^2+4x+4\Leftrightarrow 4x^2+4-x^2-4x-4\succ 0\Leftrightarrow 3x^2-4x\succ 0$

Comme : $3x^2-4x\succ 0$ sur $]-\infty;-2]$ (proposition vraie) (on dresse le tableau de signe de : $3x^2-4x$

Alors : si $x\le -2$ $\sqrt{x^2+1}\succ-\frac{1}{2}(x+2)$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\succ 0$

3) $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$

Soit $x\in\mathbb{R}$: <u>Premier cas :</u> si $x-1\ge 0$ c'est-à-dire ; $x\ge 1\Rightarrow|x-1|=x+1$

$|x-1|\le x^2-x+1\Leftrightarrow 0\le x^2-x+1-x+1\Leftrightarrow 0\le x^2-2x+2\Leftrightarrow 0\le(x-1)^2+1$

Comme : $0\le(x-1)^2+1$ est une proposition vraie

Alors : si $x\ge 1$: $|x-1|\le x^2-x+1$

<u>2 ieme cas :</u> si $x-1\prec 0$ c'est-à-dire ; $x\prec 1\Rightarrow|x-1|=-x-1$

$|x-1|\le x^2-x+1\Leftrightarrow 0\le x^2-x+1+x-1\Leftrightarrow 0\le x^2$

Comme : $0\le x^2$ est une proposition vraie

Alors : si $x\prec 1$: $|x-1|\le x^2-x+1$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas : $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$

Exercice 5 : Soit : $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$ tel que : $a+b+c=1$

1) Montrer que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$

2) Déduire que : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

3) Montrer que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$

Solution : 1) Montrons que : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$: $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$

2) Déduisons que : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

On a : $a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$\Rightarrow 2ab+2ac+2bc=1-(a^2+b^2+c^2)$

On a :D'apés1) : $a^2+b^2 \geq 2ab$ et $a^2+c^2 \geq 2ac$ et $b^2+c^2 \geq 2bc$ et la somme de ces inégalités $\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2(ab+ac+bc)$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq 1-(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2) \geq 1$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

3)Montrons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$

On a : $a+b+c=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\underbrace{a+b+c}_{=1}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)+\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)+\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)$

Comme : $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ et $\frac{a^2+c^2}{ac} \geq 2$ et $\frac{b^2+c^2}{bc} \geq 2$

Alors : $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3+2+2+2 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_1): $\sqrt{5x^2+1} \succ 2x-1$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : (I_1): $\sqrt{5x^2+1} \succ 2x-1$

$D=\{x \in \mathbb{R} / 5x^2+1 \geq 0\}=\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_1) : $x \in S \Leftrightarrow \sqrt{5x^2+1} \succ 2x-1$

Le tableau de signe de l'expression $2x-1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$

1ieme cas : si $2x-1\leq 0$ c'est-à-dire : $x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $S_1=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ car l'inéquation est toujours vérifiée ($\sqrt{5x^2+1}\geq 0$ et $2x-1\leq 0$)

2ieme cas : si $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $2x-1\succ 0$

$$\sqrt{5x^2+1}\succ 2x-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+1}\right)^2\succ(2x-1)^2 \Leftrightarrow 5x^2+1\succ 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x^2+4x\succ 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

Donc : $S_2=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\cap\left(\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $S=S_1\cup S_2=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[=\mathbb{R}$

Exercice7 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Solution : notons P(n) La proposition
Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$;

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+1+1}=\frac{n+1}{n+2}$??

On a : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Donc $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

Donc : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+2}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Exercice8 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{4n^2+5n+3}\notin\mathbb{N}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrer que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique.

Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que : n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Par l'absurde, supposons que n^2+1 est un carré parfait

Donc : il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que : $n^2+1=m^2$

On a : $n^2 \prec n^2+1$ et $n^2+1\prec(n+1)^2$ (car $(n+1)^2-n^2+1=2n\succ 0$)

C'est-à-dire : $n^2\prec n^2+1\prec(n+1)^2$ Alors : : $n^2\prec m^2\prec(n+1)^2$

Par suite : $n\prec m\prec n+1$

C'est-à-dire : il existe un entier naturel strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n^2+5n+3}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n^2+5n+3}=m$

$\sqrt{4n^2+5n+3}=m\Rightarrow 4n^2+5n+3=m^2$ et comme : $(2n+1)^2\prec 4n^2+5n+3\prec(2n+2)^2$

Alors : $2n+1\prec\sqrt{4n^2+5n+3}\prec 2n+2$

Alors : $2n+1\prec m\prec 2n+2$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $2n+1$ et $2n+2$

Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{4n^2+5n+3}\notin\mathbb{N}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.

Par l'absurde, supposons que : n est un carré parfait, et $2n$ est un carré parfait,

Donc : il existe : $m\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n=m^2$ et $\exists p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $2n=p^2$

On a : $n=m^2$ donc : $2n=2m^2$ et donc : $2m^2=p^2$

Donc : $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{2}m=p$

Donc : $\exists m\in\mathbb{N}^*$ $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{2}=\frac{p}{m}\in\mathbb{Q}$

C'est une contradiction car on a : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice9 : Soit l'ensemble : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy-2y^2+5=0\right\}$

1) a) Vérifier que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) Montrer que : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/ t\in\mathbb{R}^*\right\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants : $A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

3) On pose : $A=\left\{x\in\mathbb{R}/|2x|+|x-5|\le 3\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{R}/|3x-5|\le 3\right\}$

a) Montrons donc que : $A\subset B$?

b) Donner Le complémentaire de l'ensemble B

Solution : 1) a) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2:(x-y)(x+2y)=x^2+2xy-xy-2y^2=x^2+xy-2y^2$

b) $(x;y)\in E\cap\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x;y)\in E$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=-5$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow (x;y)\in\mathbb{Z}^2\begin{cases}x-y=-5\\x+2y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=5\\x+2y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=-1\\x+2y=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=1\\x+2y=-5\end{cases}$

Donc : $E\cap\mathbb{Z}^2=\{(-3;2);(3;-2);(1;2);(-1;-2)\}$

c) $(x;y)\in E \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=-5 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=t\\x+2y=\dfrac{-5}{t}\end{cases}$: $t\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \left(x=\dfrac{2t^2-5}{3t} et y=\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)$: $t\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

Donc : $E=\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

2) $A=\{k^2;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\left\{\dfrac{(-1)^k}{k};k\in\mathbb{N}^*\right\}$; $C=\{1+3n;n\in\mathbb{Z}\}$

3)a) Montrons donc que : $A\subset B$?

Conseils méthodologiques : Pour montrer que E ⊂ F ou que E = F)

• Pour montrer que E ⊂ F : on considère un élément quelconque de E et on montre qu'il est aussi élément de F

• Pour montrer que E = F : On montre que :E ⊂ F et que F ⊂ E .

Soit $x\in\mathbb{R}$:

Supposons que : $x\in A$ et Montrons que : $x\in B$

$x\in A\Rightarrow |2x|+|x-5|\le 3$

Or on sait que : $|a+b|\le|a|+|b|$

Donc : $|2x+x-5|\le|2x|+|x-5|\le 3\Rightarrow|2x+x-5|\le 3\Rightarrow|3x-5|\le 3\Rightarrow x\in B$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\in A\Rightarrow x\in B$

Par suite : $A\subset B$

b) $x\in B\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $|3x-5|\le 3\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $-3\le 3x-5\le 3\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $2\le 3x\le 8\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $\dfrac{2}{3}\le x\le\dfrac{8}{8}$

Donc : $x\in B\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right]$ c'est-à-dire : $B=\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right]$

$x\in\overline{B}\Leftrightarrow x\notin\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right]\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]\dfrac{8}{3};+\infty\right[$

Donc : $\overline{B}=\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]\dfrac{8}{3};+\infty\right[$

Exercice10 : Soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1) Déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2) Déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3) Déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

4) Monter que : $A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$ ou $B=\varnothing$

Solution : 1) le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

Se note : $C_{E\times F}^{A\times B}$ ou $\overline{A\times B}$

$(x;y)\in\overline{A\times F}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times F\Leftrightarrow x\notin A\, ou\, y\notin F$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A}\ ou\ \ y\in\overline{F}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F\ \ ou\ \ y\notin F$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F\ ou\ \ y\in\varnothing$ Car : $y\notin F$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{A\times F}=\overline{A}\times F$

2) $(x;y)\in\overline{E\times B}\Leftrightarrow(x;y)\notin E\times B\Leftrightarrow x\notin E ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{E} ou y\in\overline{B}\Leftrightarrow(x;y)\in E\times\overline{B}$ ou $x\notin E$

$\Leftrightarrow(x;y)\in E\times\overline{B}$ Car : $x\notin E$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{E\times B}=E\times\overline{B}$

3) $(x;y)\in\overline{A\times B}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times B\Leftrightarrow x\notin A ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A} ou y\in\overline{B}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ ou $(x;y)\in E\times\overline{B}$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\left(\overline{A}\times F\right)\cup\left(E\times\overline{B}\right)$

Donc : $\overline{A\times B}=\left(\overline{A}\times F\right)\cup\left(E\times\overline{B}\right)$

4) Monter que : $A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$

a) Montrons que : $A\times B=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$

Supp : $A\times B=\varnothing$ et Montrons que : $A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$

Supp que : $A\neq\varnothing$ et $B\neq\varnothing$

Donc : $\exists x\in A$ et $\exists y\in B$

Donc : $\exists(x;y)\in A\times B$

Donc : $A\times B\neq\varnothing$ absurde car $A\times B=\varnothing$

Donc : $A\times B=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$

b) Montrons que : $A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing\Rightarrow A\times B=\varnothing$

Supp : $A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$ et Montrons que : $A\times B=\varnothing$

Supp que : $A\times B\neq\varnothing$ donc : $\exists(x;y)\in A\times B$

Donc : $\exists x\in A$ et $\exists y\in B$

Donc : $A\neq\varnothing$ et $B\neq\varnothing$ absurde car : $A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$

Donc : $A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing\Rightarrow A\times B=\varnothing$

Conclusion : $A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\ ou\ B=\varnothing$

Exercice11 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 2) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\ \mapsto x^2\end{array}$ 3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2]\\ x\ \mapsto x^2\end{array}$

Solution : <u>Conseils méthodologiques :</u>

(Pour montrer que f est ou n'est pas bijective)

1) Pour montrer que f n'est pas bijective : on montre qu'elle n'est pas injective ou pas surjective ;

2) Pour montrer que f est bijective :

a) On choisit y ∈ F , et on montre que cet élément admet un unique antécédent dans E par f ;

b) On montre que f est à la fois injective et surjective ;

c) On détermine la bijection réciproque f^{-1}.

1) $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$; $f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.

-1 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : f n'est pas surjective.
Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

2)a) $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2\end{array}$ Soient $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ car $x_1 \geq 0$ ≥ 0 et $x_2 \geq 0$

Donc f est injective

b) Soit $y \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $g(x) = y$, donc f est surjective.

f est donc bijective

3) $h : \begin{array}{l}[0;1] \to [0;2] \\ x \mapsto x^2\end{array}$ a) Soient $x_1 \in [0;1]$ et $x_2 \in [0;1]$

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ car $x_1 \geq 0$ ≥ 0 et $x_2 \geq 0$

Donc h est injective

b) 2 n'a pas d'antécédent, car $h(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans [0,1]. h N'est pas surjective

h n'est pas bijective

Exercice12: Soit f l'application : $\begin{array}{l}\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}\end{array}$

1)Montrer que : f est injective

2)l'application $g : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}\end{array}$ est-elle injective ? justifier

Solution : Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $x_2 \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $f(x_1) = f(x_2)$

Donc : $\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} = \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1} \Rightarrow x_1^2 - x_1 + 1 = x_2^2 - x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad ou \quad x_1 + x_2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad ou \quad x_1 + x_2 = 1$

Donc : $\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} = \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1} \Rightarrow x_1 = x_2 \; ou \; x_1 + x_2 = 1$

Or : $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$ $\Rightarrow x_1 \succ \frac{1}{2}$ et $x_2 \succ \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_1 \times x_2 \succ 1$ $\Rightarrow x_1 \times x_2 \neq 1$

Donc : $\frac{x_1}{x_1^2+x_1+1} = \frac{x_2}{x_2^2+x_2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite : f est injective

2) Montrons que : $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2-x+1} \end{array}$ n'est pas injective

On prend : $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$: $g(0) = \sqrt{0^2-0+1} = 1$ et $g(1) = \sqrt{1^2-1+1} = 1$

On a donc : $0 \neq 2$ mais : $g(0) = g(1)$

Ceci signifie que l'application g n'est pas injective

Exercice13 : Soit les applications : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to]0;1] \\ x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2} \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto \frac{1}{n^2-2n+3} \end{array}$

1)Montrer que f est surjective

2) g est-elle injective ? justifier

Solution : 1) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$: Soient $y \in]0;1]$; Résolvons l'équation : $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-2x+2} = y \Leftrightarrow 1 = y\left(x^2-2x+2\right)$$

or $x^2-2x+2 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ car $\Delta \prec 0$

$\Leftrightarrow yx^2-2xy+2y-1=0$ Le discriminant de l'équation est : $\Delta = (-2y)^2 - 4y \times (2y-1) = 4y(1-y)$

Comme : $0 \prec y \leq 1$ alors : $1-y \geq 0$ et donc : $\Delta \geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

2)Démarche1 : Si je trouve : $n \neq m$ et $g(n) = g(m)$ on peut affirmer que g n'est pas injective.

On a : $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g(2) = \frac{1}{3}$ donc $g(0) = g(2)$ mais $0 \neq 2$

Donc : g n'est pas injective

Démarche2 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$g(n) = g(m) \Rightarrow \frac{1}{n^2-2n+3} = \frac{1}{m^2-2m+3}$$

$$\Rightarrow n^2-2n+3 = m^2-2m+3 \Rightarrow n^2-m^2-2(n-m) = 0 \Rightarrow (n-m)(n+m)-2(n-m) = 0$$

$$\Rightarrow (n-m)(n+m-2) = 0 \Rightarrow n-m=0 \ ou \ n+m-2=0 \Rightarrow n=m \ ou \ m=2-n$$

Pour : $n = 2$ et $m = 2-2 = 0$ on a ; $g(n) = g(m)$

Donc : g n'est pas injective

Exercice14 : Soit l'application : $f : \begin{array}{l}]-2;+\infty[\to]-\infty;4[\\ x \mapsto \frac{4x}{x+2} \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

4) a) Vérifier que : $\forall x \in]-2;+\infty[\ f(x) = 4 - \dfrac{8}{x+2}$

b) Déterminer : $f\left([0;+\infty[\right)$ et $f^{-1}\left(]-\infty;2[\right)$

Solution : 1) $f(x) = \dfrac{4x}{x+2}$

Soient $x_1 \in]-2;+\infty[$ et $x_2 \in]-2;+\infty[$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{4x_1}{x_1+2} = \dfrac{4x_2}{x_2+2} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_1+2} = \dfrac{x_2}{x_2+2} \Rightarrow x_1(x_2+2) = x_2(x_1+2)$

$\Rightarrow x_2x_1 + 2x_1 = x_1x_2 + 2x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

2)Soient $y \in]-\infty;4[$

Résolvons dans $]-2;+\infty[$ l'équation : $f(x) = y$

Soit : $x \in]-2;+\infty[$

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x+2} = y \Leftrightarrow 4x = y(x+2)$ car $x \in]-2;+\infty[$ donc $x+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 4x - xy = 2y \ \Leftrightarrow x(4-y) = 2y$ et $y \in]-\infty;4[$

Donc : $4 - y \neq 0 \ \Leftrightarrow x = \dfrac{2y}{4-y}$

Vérifions que : $x = \dfrac{2y}{4-y} \in]-2;+\infty[???$

$\dfrac{2y}{4-y} - (-2) = \dfrac{2y}{4-y} + 2 = \dfrac{2y - 2y + 8}{4-y} = \dfrac{8}{4-y} \succ 0$ Car $y \in]-\infty;4[$

Donc : $x = \dfrac{2y}{4-y} \in]-2;+\infty[?$

Donc $\forall y \in]-\infty;4[\ \exists x \in]-2;+\infty[/ f(x) = y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

3) On a d'après les questions précédentes que l'application f est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application f est bijective.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]-2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{4-y} \\ y \in]-\infty;4[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in]-\infty;4[\ ; \ f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{4-x}$ et $\begin{aligned} f^{-1} :]-\infty;4[&\to]-2;+\infty[\\ x &\mapsto \dfrac{2x}{4-x} \end{aligned}$

4) a) Soit : $x \in]-2;+\infty[$

$f(x) = \dfrac{4x}{x+2} = \dfrac{4x + 8 - 8}{x+2} = \dfrac{4(x+2)}{x+2} - \dfrac{8}{x+2} = 4 - \dfrac{8}{x+2}$

b) $f\left([0;+\infty[\right) = ?$

$f\left(\left[0;+\infty\right[\right)=\left\{f(x)/x\in\left[0;+\infty\right[\right\}$

$x\in\left[0;+\infty\right[\Leftrightarrow x+2\geq 2\Leftrightarrow 0\prec\frac{1}{x+2}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\prec\frac{8}{x+2}\leq 4\Leftrightarrow -\frac{8}{x+2}\geq -4\Leftrightarrow 4-\frac{8}{x+2}\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0$

$x\in\left[0;+\infty\right[\Leftrightarrow f(x)\in\left[0;+\infty\right[$

$f\left(\left[0;+\infty\right[\right)=\left[0;+\infty\right[$

$f^{-1}\left(\left[2;11\right]\right)$ = ??

$f^{-1}\left(\left]-\infty;2\right]\right)=\left\{x\in\left]-2;+\infty\right[/f(x)\in\left]-\infty;2\right]\right\}$

<u>Soit : $x\in\left]-2;+\infty\right[$</u> : $x\in f^{-1}\left(\left]-\infty;2\right]\right)\Leftrightarrow f(x)\leq 2\Leftrightarrow 4-\frac{8}{x+2}\leq 2$

$\Leftrightarrow -\frac{8}{x+2}\leq -2\Leftrightarrow \frac{8}{x+2}\geq 2\Leftrightarrow \frac{4}{x+2}\geq 1\Leftrightarrow 0\prec x+2\leq 4\Leftrightarrow -2\prec x\leq 2$

$x\in f^{-1}\left(\left]-\infty;2\right]\right)\Leftrightarrow x\in\left]-2;2\right[$

Donc : $f^{-1}\left(\left]-\infty;2\right]\right)=\left]-2;2\right[\cap\left]-2;+\infty\right[=\left]-2;2\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien