1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère la proposition : $P:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):x^2\geq 1\ et\ x^2+2x-3\geq 0$

1) Nier la proposition P .
2) Montrer que P est vraie.

Exercice2 : 1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $|x|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leq 2x^2$

Exercice3: Soit : $n\in\mathbb{N}^*$; Montrer que : soit 4 divise n^2 soit 4 divise n^2-1

Exercice4 : 1) Soient $x;y\ et\ z$ trois réels. Montrer que : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}\ ou\ y\succ\frac{z}{2}$

2) Montrer que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3)Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice5 : Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$; $y\in\mathbb{R}^{*+}$

On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrer que : $A\geq(a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

Exercice6 : Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1) Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Longrightarrow a=b=0$
2) En déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Remarque : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice7 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$.

Exercice8 : Soient : x_1 ; x_2 ; x_3 ; …. ; x_n des nombres réels dans $[0;1]$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k$.

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_2): $\sqrt{x^2+1}-2x+1 \leq 0$

Exercice10 :1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3 \prec (4n+2)^2$

2) a) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

Exercice11 : Soient les ensembles : $A=\{1;2\}$ et $B=\{2;3;4\}$;

$C=\{m \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R};\ (m+1)x^2+(m+3)x+m+1 \succ 0\}$

1)Déterminer en extension : $A \cup B$; $A \cap B$; $A-B$; $B-A$; $A \Delta B$ et C

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants :

$A \times B$; $B \times A$; A^2 et déterminer : $card(A \times B)$

3)Déterminer l'ensemble des parties de A^2 qui se note $\mathcal{P}(A^2)$.

Exercice12 : Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B .

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :

$C_E^{C_E^A}$; $A \cap C_E^A$; $A \cup C_E^A$; $C_E^{\varnothing}$; C_E^E

Exercice13 : E est un ensemble.

1) Montrer que quelles que soient les parties : A et X de E : $(A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X) = X$

2) En déduire dans E les solutions de l'équation : $A-X=X-A$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} I \to J \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

1) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2) Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3) Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective

Exercice15 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]2;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{2x}{x-1} \end{array}$

1)Montrer que f est injective
2)Montrer que f est surjective
3) En déduire que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice16 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

b) f est-elle injective ? justifier

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \dfrac{1}{4}$

b) f est-elle surjective ? justifier

3) f est-elle bijective ?

Exercice17 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ et Considérons les ensembles :

$A = [0;2\pi]$; $B = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; $C = \mathbb{R}$

Déterminer :

1) L'image directe des ensembles : A ; B et C par f.

2) L'image réciproque des ensembles : $A' = [0;1]$; $B' = [3;4]$ et $C' = [1;2]$ par f.

Exercice18 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E et Soient A' et B' deux parties de F

1) Montrer que : si A $\subset B$ alors : $f(A) \subset f(B)$

2) Montrer que : si A' $\subset B'$ alors : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Exercice19 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, Montrer que : 1) $f\,(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) $f\,(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte.

3)Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a : $f\,(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien