http://www.xriadiat.com **DL1: M** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : On considère la proposition : $P:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):x^2\geq 1 \ et\ x^2+2x-3\geq 0$

1) Nier la proposition P .
2) Montrer que P est vraie.

Solution :1) $\overline{P}:\left(\exists x\in[1;+\infty[\right):x^2\prec 1 \ \ ou\ \ x^2+2x-3\prec 0$

2) Montrons que P est vraie.

Soit : $x\in[1;+\infty[$

- $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1^2\Rightarrow x^2\geq 1$
- $Pour\ \ x^2+2x-3:\ \ \Delta=4+12=16\succ 0$: deux racines : $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=\frac{-2+4}{2}=1$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=\frac{-2-4}{2}=-3$

Le tableau de signe donne :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x\in[1;+\infty[$ alors : $x^2+2x-3\geq 0$

Par suite : $P:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):x^2\geq 1 \ et\ x^2+2x-3\geq 0$

Exercice2 : 1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $|x|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leq 2x^2$

Solution : 1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $1+x+\frac{x^2}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x}=\frac{1^2-x^2+x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

b) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ tel que : $|x|\leq\frac{1}{2}$

On a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$ donc : $\frac{1}{1-x}-(1+x)=\frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\left|\frac{x^2}{1-x}\right|$ c'est-à-dire : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\frac{x^2}{|1-x|}\ (1)$ Car : $x^2\geq 0$

On a : $|x|\leq\frac{1}{2}$ donc : $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}\leq -x\leq\frac{1}{2}$

Donc : $1-\frac{1}{2}\leq 1-x\leq 1+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\leq 1-x\leq\frac{3}{2}$ et par suite : $\frac{2}{3}\leq\frac{1}{1-x}\leq 2$

Donc : $-2\leq\frac{2}{3}\leq\frac{1}{1-x}\leq 2$

Par suite : $\frac{1}{|1-x|} \le 2$ et puisque : $x^2 \ge 0$ alors : $\frac{x^2}{|1-x|} \le 2x^2$ et d'après l'égalité (1)

On a donc : $\left|\frac{1}{1-x} - (1+x)\right| \le 2x^2$

Exercice3: Soit : $n \in \mathbb{N}^*$; Montrer que : soit 4 divise n^2 soit 4 divise $n^2 - 1$

Solution : On va Opérer par disjonction de cas : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$;

1cas : n est pair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n^2 = 4k^2 = 4k' \Rightarrow$ 4 divise n^2

2cas : n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k+1$

$\Rightarrow n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2+k) = 4k' \Rightarrow$ 4 divise $n^2 - 1$

Exercice4 : 1) Soient $x; y$ et z trois réels. Montrer que : $x + y \succ z \Rightarrow x \succ \frac{z}{2}$ ou $y \succ \frac{z}{2}$

2) Montrer que $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $\left(x \ne \frac{1}{\sqrt{2}} \ et \ y \ne \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \ne \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3)Soient $(x; y; z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$

Montrer que : $x \ne y$ ou $y \ne z$ ou $z \ne x$

Solution : 1) Soient $x; y$ et z trois réels. Montrons que : $x \le \frac{z}{2}$ et $y \le \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \le z$

$x \le \frac{z}{2}$ et $y \le \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \le \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \le z$

Par contraposition on a donc : $x + y \succ z \Rightarrow x \succ \frac{z}{2}$ ou $y \succ \frac{z}{2}$

2) Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$: Montrons que : $\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ou \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} \Rightarrow 2xy2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 1$

$\Rightarrow 2xy - \sqrt{2}y - \sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow 2y\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2y - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ ou \ 2y - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ ou \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Par contraposition on a donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $\left(x \ne \frac{1}{\sqrt{2}} \ et \ y \ne \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \ne \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3)Soient $(x; y; z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x = y$ et $y = z$ et $z = x$

C'est-à-dire supposant que : $x = y = z$

Comme on a : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$ et $x = y = z$

Alors : $x(x+x) + x(x+x) + x(x+x) = 12$

Donc : $2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$ contradiction car $x \in \mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Par suite : $x \ne y$ ou $y \ne z$ ou $z \ne x$

Exercice5 : Soient $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $y \in \mathbb{R}^{*+}$

On pose : $A = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall (x;y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2a$

2) Montrer que : $A \geq (a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$

Solution : : 1) a) Soit $(x;y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall (x;y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

2) Soit $(x;y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

On a : $\left(\forall (x;y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ et puisque : $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{1}{y} \in \mathbb{R}^{*+}$ on appliquant cette inégalité

On a donc : $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ donc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ et comme : $a = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

Alors : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2a$

2) Montrons que : $A \geq (a+1)^2$

On a : $A = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1 + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{xy}$ et comme : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2a$ et $a = \frac{1}{\sqrt{xy}} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{xy}$

Donc : $1 + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{xy} \geq 1+2a+a^2$ c'est-à-dire : $A \geq (a+1)^2$

3) Déduisons que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$

On a : $A \geq (a+1)^2$ c'est-à-dire : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq (a+1)^2$

Or on a : $x+y=1$ et $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ donc : $\frac{1}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2 \Rightarrow a \geq 2$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq (a+1)^2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq (2+1)^2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$

Exercice6 : Soient $a;b \in \mathbb{Q}$

1) Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

2) En déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$

Remarque : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Solution :1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b \neq 0$

$a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow b\sqrt{2}=-a \Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$

Or $a;b \in \mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc : $a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

Donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après 1) on aura **:** $a-a'=0$ et $b-b'=0$

Donc $a=a'$ et $b=b'$

Exercice7 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1} 1(1-1)=0$ et $\frac{1(1^2-1)}{6}=0$ Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1} k(n+1-k)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1} k(n+1-k)=\sum_{k=1}^{k=n} k(n+1-k)+(n+1)(n+1-(n+1))=\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k)+\sum_{k=1}^{k=n} k$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1} k(n+1-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2-1)+3n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)+3n(n+1)}{6}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(n+1)(n-1+3)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$.

Exercice8 : Soients : x_1 ; x_2 ; x_3 ; …. ; x_n des nombres réels dans $[0;1]$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k$.

Solution : Notons P(n) La proposition " $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $\prod_{k=1}^{k=1}(1-x_k)=1-x_1$ et $1-\sum_{k=1}^{k=1}x_k=1-x_1$

Donc : $\prod_{k=1}^{k=1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=1}x_k$ par suite P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k$ et comme : $1-x_{n+1}\geq 0$ car $x_{n+1}\in[0;1]$

Donc : $(1-x_{n+1})\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq\left(1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k\right)(1-x_{n+1})$

Donc : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k-x_{n+1}+x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k$

Donc : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k+x_{n+1}\right)+\left(x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\right)$

Donc: $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k+\left(x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\right)$ et puisque : $x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\geq 0$ alors : $1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k+\left(x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\right)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k$

Par suite on a : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k$ c'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k$.

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_2): $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : (I_2): $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$

$D_2=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_2) :

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1$

Le tableau de signe de l'expression $2x-1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

1ieme cas : si $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $2x-1 \geq 0$

$\sqrt{x^2+1} \leq 2x-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \leq (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1 \leq 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow -3x^2+4x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc : $S_1 = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\cap \left(\left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\right) = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2ieme cas : si $x \in \left[-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors $2x-1 \prec 0$

Donc : $S_2 = \varnothing$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice10 :1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3 \prec (4n+2)^2$

2) a) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

Solution :1) Comme : $16n^2+8n+3 = \left((4n)^2+2\times 4n+1\right)+2 = (4n+1)^2+2$

et comme : $(4n+1)^2 \prec (4n+1)^2+2$

Alors : $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3$

Calculons $(4n+2)^2$: $(4n+2)^2 = (4n)^2+2\times 4\times 2n+4 = 16n^2+16n+4$

Comparons : $(4n+2)^2$ et $16n^2+8n+3$:

$(4n+2)^2-(16n^2+8n+3) = 16n^2+16n+4-16n^2-8n-3 = 8n+1 \succ 0$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$: $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3 \prec (4n+2)^2$

2) a) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $(4n+1)^2 \prec 16n^2+8n+3 \prec (4n+2)^2$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ $4n+1 \prec \sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n+2$ et comme : $4n+2 = (4n+1)+1$

Donc : $\sqrt{16n^2+8n+3}$ est compris strictement entre deux entiers consécutifs : $4n+1$ et $4n+2$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $4n+1 \prec \sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n+2$

Donc : $4n^2+4n+1 \prec 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n^2+4n+2$

Donc : $(2n+1)^2 \prec 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3} \prec 4n^2+4n+2 \prec 4n^2+8n+4$

Donc : $(2n+1)^2 \prec 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3} \prec (2n+2)^2$

Donc : $2n+1 \prec \sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}} \prec 2n+2$

Donc : $n^2+2n+1 \prec n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}} \prec n^2+2n+2$

Donc : $(n+1)^2 \prec n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}} \prec n^2+2n+2 \prec n^2+4n+4 : (n+2)^2$

Donc : $n+1 \prec \sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}} \prec n+2$

Donc : ce nombre est compris strictement entre deux entiers consécutifs : $n+1$ et $n+2=(n+1)+1$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}} \notin \mathbb{N}$

Exercice11 : Soient les ensembles : $A=\{1;2\}$ et $B=\{2;3;4\}$;

$C=\{m\in\mathbb{R} / \forall x\in\mathbb{R};\ (m+1)x^2+(m+3)x+m+1\succ 0\}$

1)Déterminer en extension : $A\cup B$; $A\cap B$; $A-B$; $B-A$; $A\Delta B$ et C

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants :

$A\times B$; $B\times A$; A^2 et déterminer : $card(A\times B)$

3)Déterminer l'ensemble des parties de A^2 qui se note $\mathcal{P}(A^2)$.

Solution :1) $A\cup B=\{1;2;3;4\}$; $A\cap B=\{2\}$: $A-B=\{1\}$; $B-A=\{3;4\}$

$A\Delta B=(A-B)\cup(A-B)=\{1;3;4\}$

Déterminons en extension l'ensemble : C

Soit $m\in\mathbb{R}$: On a : $m+1\succ 0$

$m\in C \Leftrightarrow \Delta \prec 0 \Leftrightarrow m+1\succ 0$ et $(m+3)^2-4(m+1)^2\prec 0$

$\Leftrightarrow m+1\succ 0$ et $-3m^2-2m+5\prec 0$; $\Delta=36$; $m_1=-\frac{5}{3}$ et $m_2=1$

$-3m^2-2m+5\prec 0 \Leftrightarrow m\in \left]-\infty;\frac{-5}{3}\right[\cup]1;+\infty[$

$m\in C \Leftrightarrow m\succ -1$ et $m\in \left]-\infty;\frac{-5}{3}\right[\cup]1;+\infty[$

$m\in C \Leftrightarrow m\succ -1$ et $m\in]1;+\infty[$

Donc : $C=]1;+\infty[$

2) $A\times B=\{(1;2);(1;3);(1;4);(2;2);(2;3);(2;4)\}$

$B\times A=\{(2;1).(2;2);(3;1);(3;2);(4;1);(4;2);\}$ Remarque : $A\times B\neq B\times A$

$A^2=A\times A=\{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$

$card(A\times B)=6=card(A)\times card(B)$ et $card(A^2)=card(A)\times card(A)=4$

3) On a : $A^2=A\times A=\{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$

$P(A^2)=\{\varnothing;\{(1;1)\};\{(1;2)\};\{(2;1)\};\{(2;2)\};\{(1;1);(1;2)\};\{(1;1);(2;1)\};\{(1;1);(2;2)\};\{(1;2);(2;1)\};\{(1;2);(2;2)\};\{(2;1);(2;2)\};$

$\{(1;1);(1;2);(2;1)\}$; $\{(1;1);(1;2);(2;2)\}$; $\{(1;2);(2;1);(2;2)\}$; $\{(1;1);(2;1);(2;2)\}; A^2\}$

$card(P(A^2))=2^{cardP(A^2)}=2^4=16$

Exercice12 : Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :

$C_E^{C_E^A}$; $A \cap C_E^A$; $A \cup C_E^A$; $C_E^{\varnothing}$; C_E^E

Solution : a) Montrons que : $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$

a) Soit $x \in C_E^B = \overline{B}$ alors $x \notin B$, comme $A \subset B$

Alors $x \notin A$, autrement dit $x \in C_E^A = \overline{A}$ ce qui montre que si $x \in \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$

Donc : $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$

b) Si $x \in A$ alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \emptyset$) donc $x \in \overline{B}$

Si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A}$

Alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c)

- $x \in C_E^{C_E^A} \Leftrightarrow x \notin C_E^A \Leftrightarrow x \in A$

Donc : $C_E^{C_E^A} = A$

- $x \in A \cap C_E^A \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in C_E^A \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin A$

$x \in A \cap C_E^A \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Donc : $A \cap C_E^A = \varnothing$

- $x \in A \bigcup C_E^A \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in C_E^A \Leftrightarrow x \in E$

$x \in A \cup C_E^A \Leftrightarrow x \in E$

Donc : $A \cup C_E^A = E$

- $x \in C_E^{\varnothing} \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin \varnothing \Leftrightarrow x \in E$

$x \in C_E^{\varnothing} \Leftrightarrow x \in E$

Donc : $C_E^{\varnothing} = E$

- $x \in C_E^E \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin E \Leftrightarrow x \in \varnothing$

$x \in C_E^E \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Donc : $C_E^E = \varnothing$

Exercice13 : E est un ensemble.

1) Montrer que quelles que soient les parties : A et X de E : $(A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X) = X$

2) En déduire dans E les solutions de l'équation : $A - X = X - A$

Solution : 1) $(A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X) = (\overline{A} \cup A) \cap X = E \cap X = X$

2) $A - X = X - A \Leftrightarrow A \cap \overline{X} = X \cap \overline{A}$

$\Rightarrow (A \cap \overline{X}) \cup (A \cap X) = (X \cap \overline{A}) \cup (A \cap X) \Rightarrow A = X$

Inversement si $X = A$ alors : X solution de l'équation : $A - X = X - A$ car : $A - A = A - A$

Exercice14 : Soit l'application $f : \begin{array}{l} I \to J \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

1) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2) Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3) Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective

Solution : 1) $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2) $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3) $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4) $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Exercice15 : Soit l'application : $f : \left]1;+\infty\right[\to \left]2;+\infty\right[$
$x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$

1)Montrer que f est injective
2)Montrer que f est surjective
3) En déduire que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : 1) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$: Soient $x_1 \in \left]1;+\infty\right[$ et $x_2 \in \left]1;+\infty\right[$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{x_1-1} = \frac{2x_2}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1-1} = \frac{x_2}{x_2-1} \Rightarrow x_1(x_2-1) = x_2(x_1-1)$$

$$\Rightarrow x_2x_1 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ donc : f est injective

2) Soit : $y \in \left]2;+\infty\right[$

Résolvons dans : $\left]1;+\infty\right[$ l'équation $f(x) = y$

Soit : $x \in \left]1;+\infty\right[$

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} = y$; $x-1 \neq 0$ car $x \in \left]1;+\infty\right[$

$f(x) = y \Leftrightarrow 2x = y(x-1) \Leftrightarrow 2x - yx = -y \Leftrightarrow x(2-y) = -y \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{-y}{2-y} = \dfrac{y}{y-2}}$ car $y-1 \neq 0$

Vérifions que : $x = \dfrac{-y}{2-y} \in \left]1;+\infty\right[$

$x - 1 = \dfrac{y}{y-2} - 1 = \dfrac{y-y+2}{y-2} = \dfrac{2}{y-2} \succ 0$ car $y \in \left]2;+\infty\right[$

Donc : $\forall y \in \left]2;+\infty\right[\; \exists x = \dfrac{y}{y-2} \in \left]1;+\infty\right[$ tel que : $f(x) = y$

Donc : f est surjective.
3) f est injective et surjective donc bijective

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in \left]1;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \dfrac{y}{y-2} \\ y \in \left]2;+\infty\right[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in]2;+\infty[$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$

$f^{-1} :]2;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Exercice16 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

b) f est-elle injective ? justifier

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \le \dfrac{1}{4}$

b) f est-elle surjective ? justifier

3) f est-elle bijective ?

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(1-x)^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 = \frac{x(1-x)^2}{(x^2+1)^2} = f(x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

b) Si je trouve : $x \ne y$ et $f(x) = f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

Si je prends : $x = 2$

On a : $f(2) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ mais $2 \ne \dfrac{1}{2}$

Donc : f n'est pas injective

2) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \le \dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} - f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x(1-x)^2}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-4x(x^2-2x+1)}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^4-4x^3+8x^2-4x+2x^2+1}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^4-4x^3+10x^2-4x+1}{4(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(x^2-4x+10-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2^2+4\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2+4\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}\geq 0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f\left(x\right)\leq\frac{1}{4}$

b) Par exemple. 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f\left(x\right)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

3) f n'est pas bijective

Exercice17 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sin x\end{array}$ et Considérons les ensembles :

$A=\left[0;2\pi\right]$; $B=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $C=\mathbb{R}$

Déterminer :

1) L'image directe des ensembles : A ; B et C par f.

2) L'image réciproque des ensembles : $A'=\left[0;1\right]$; $B'=\left[3;4\right]$ et $C'=\left[1;2\right]$ par f.

Solution : 1) On a : $f\left(A\right)=f\left(\left[0;2\pi\right]\right)=\left\{f\left(x\right)\in\mathbb{R}/0\leq x\leq 2\pi\right\}=\left[-1;1\right]$

$f\left(B\right)=f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left\{f\left(x\right)\in\mathbb{R}/0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right\}=\left[0;1\right]$

$f\left(C\right)=f\left(\mathbb{R}\right)=\left\{f\left(x\right)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\right\}=\left[-1;1\right]$

2) $f^{-1}\left(\left[0;1\right]\right)=\left\{x\in\mathbb{R}/f\left(x\right)\in\left[0;1\right]\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi;2k\pi+\pi\right]$

$f^{-1}\left(\left[3;4\right]\right)=\left\{x\in\mathbb{R}/f\left(x\right)\in\left[3;4\right]\right\}=\varnothing$

$f^{-1}\left(\left[1;2\right]\right)=\left\{x\in\mathbb{R}/f\left(x\right)\in\left[1;2\right]\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sin\left(x\right)=1\right\}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice18 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E et Soient A' et B' deux parties de F

1) Montrer que : si $A\subset B$ alors : $f(A)\subset f(B)$

2) Montrer que : si $A'\subset B'$ alors : $f^{-1}(A')\subset f^{-1}(B')$

Solution :1) Supposons que : $A\subset B$

Soit $y\in f(A)$, il existe $x\in A$ tel que : $y=f(x)$.

Et puisque : $A\subset B$ alors $x\in B$

Ceci signifie que : $y\in f(B)$

Conclusion : $f(A)\subset f(B)$

1) Supposons que : $A'\subset B'$

Soit $x\in f^{-1}(A')$, donc $f(x)\in A'$ et puisque : $A'\subset B'$ alors $f(x)\in B'$

Ceci signifie que : x ∈ f^{-1}(B'),
Conclusion : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
Exercice19 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, Montrer que : 1) $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2) $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte.
3)Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a : $f\ (A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
Solution :1) a) Pour tout $y \in f\ (A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que : $y = f(x)$.
Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$,
Comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$
Par conséquent : $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$
Cela montre que $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
b) Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$,
Mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f\ (A \cup B)$
Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$,
Mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f\ (A \cup B)$
Cela montre que s tous les cas $y \in f\ (A \cup B)$ et que donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$
Finalement $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2) Pour tout $y \in f\ (A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que :$y = f(x)$.
Comme $x \in A \cap B \subset A$, $y = f(x) \in f(A)$, Comme $x \in A \cap B \subset B$, $y = f(x) \in f(B)$
Par conséquent $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$
Cela montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte,
D'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons :
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, ensuite il faut prendre/
A et B où f n'est pas injective, par exemple : $A = [-4,2]$ et $B = [-2,3]$
$f(A) = f([-4,2]) = [0,16]$; $f(B) = f([-2,3]) = [0,9]$
$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0,9]$ $A \cap B = [-2,2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0,4]$
On a bien $f\ (A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien