http://www.xriadiat.com **DL1: L** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Montrer que Les propositions suivante sont fausses :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\geq x+y$

2) $Q:(\forall x\in[0;1]):x^2\geq x$

3) R:«Tout entier positif est somme de trois carrés »

4) $M:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$

5) $N:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$

Exercice2 : Soient P et Q deux propositions

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) Donner la négation de la proposition : $P\Rightarrow Q$

2) Donner la valeur de vérité de : $(1=2)\Rightarrow(2=3)$

Exercice3 : Soient a et b deux réels

Montrer que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]\Rightarrow\frac{3}{16}|a-b|\leq\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\leq\frac{3}{4}|a-b|$

Exercice4 : 1) Montrer que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^*)^2$ et $b\neq 2a$: $b\neq\frac{1}{8}a\Rightarrow\frac{a+2b}{2a-b}\neq\frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\frac{2x^2+1}{1+x^2}\neq 2$

3)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=0$

4) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$.

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}-x\succ 0$

5)Montrer que : pour tout entier $n\geq 4$: $2^n\geq n^2$

Exercice5 : Soit $(a;b;c)\in(\mathbb{R}^{+*})^3$ tel que : $a+b+c=1$

1) Montrer que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$

2) Déduire que : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

3) Montrer que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

Exercice6 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}.$$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

Exercice8 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{n^2+4n+7}\notin\mathbb{N}$

Exercice9 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{6n-2}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{3n+1}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{1}{12}\in B$ et $\frac{1}{12}\notin A$ 2) Montrer que : $A\subset B$ 3) Est-ce qu'on a : $A=B$?

Exercice10 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

1)Montrons que : $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

2) Monter que : $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

3) Monter que : $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$

Exercice11 : Soient l'ensemble :

$L=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 1\}$ et $G=[-1;1]$

1) Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

2) Monter que : $L\subset G^2$ et $L\neq G^2$

Exercice12 : Soient les applications suivantes : $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+2x\end{array}$ et $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\cos x\end{array}$

1) Montrer que : $f([-1;1])=[-1;3]$

2) Déterminer : $g^{-1}(]1;2])$

Exercice13 : Soient les applications suivantes :

$f:\begin{array}{l}]1;+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{x^2+x+1}\end{array}$ et $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3-x^2\end{array}$ et $h:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to]-\infty;3]\\ x\mapsto 3-x^2\end{array}$

1) Montrer que : f est injective

2) g est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

3) Montrer que : h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$ et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

Exercice14 : Soit l'application $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+4x+1\end{array}$

1) f est-elle injective ?

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geq -3$

b) f est-elle surjective ?

Exercice15 : Soit la fonction φ définie par : $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{2} & si\ \ x\ est\ \ pair\\ -\dfrac{x+1}{2} & si\ \ x\ est\ impair\end{cases}$$

Montrer que φ est une bijection

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien