http://www.xriadiat.com **DL1: L** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Montrer que Les propositions suivante sont fausses :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2+y^2\geq x+y$

2) $Q:(\forall x\in[0;1]): x^2\geq x$

3) R :«Tout entier positif est somme de trois carrés »

4) $M:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$

5) $N:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$

Solution : 1) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2+y^2\geq x+y$

Sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2+y^2\prec x+y$

En posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$

Donc : La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

2) $Q:(\forall x\in[0;1]): x^2\geq x$

Sa négation est : $\overline{Q}:(\exists x\in[0;1]): x^2\prec x$

En posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{Q}$ est vraie donc Q est fausse

3) R :«Tout entier positif est somme de trois carrés ».
(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple : $6=1^2+1^2+2^2$.)
Un contre-exemple : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.
Donc R est fausse

4) $M:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$

Sa négation est :

$\overline{M}:\exists(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\c\neq d\end{cases}$ et $a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$
Donc ; La proposition $\overline{M}$ est vraie donc M est fausse

5) $N:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$ Sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2\neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ C'est-à-dire : y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ Donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

Donc : La proposition $\overline{N}$ est vraie donc N est fausse

Exercice2 : Soient P et Q deux propositions

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) Donner la négation de la proposition : $P \Rightarrow Q$

2) Donner la valeur de vérité de : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$

Solution :1) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

La négation de la proposition : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$ est $(1=2)$ et $(2 \neq 3)$qui est faux

Donc : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$ est une proposition vraie

Exercice3 : Soient a et b deux réels

Montrer que : $a \in [0;2]$ et $b \in [0;2] \Rightarrow \frac{3}{16}|a-b| \leq \left|\frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b}\right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$

Solution : 1) $\left|\frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b}\right| = \left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right| = \left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b}\right| = \left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right| = \left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b}\right| = \frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|} = \frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a| = |a-b|$

Or on a : $a \in [0;2]$ signifie $0 \leq a \leq 2$

Et on a : $b \in [0;2]$ signifie $0 \leq b \leq 2$

Donc : $2 \leq 2+a \leq 4$ et $2 \leq 2+b \leq 4$

Par suite : $4 \leq (2+b)(2+a) \leq 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)| = (2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(2+b)(2+a)} \leq \frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16} \leq \frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)} \leq \frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b| \geq 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b| \leq \left|\frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b}\right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$

Exercice4 : 1) Montrer que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $b \neq 2a$: $b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2+1}{1+x^2} \neq 2$

3)Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0$

4) a) Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} + x \succ 0$.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} - x \succ 0$

5)Montrer que : pour tout entier $n \geq 4$: $2^n \geq n^2$

Solution : 1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $b\neq 2a$: $\frac{a+2b}{2a-b}=\frac{2}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{8}a$

Soit $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ $:\Rightarrow -a+8b=0$

$\frac{a+2b}{2a-b}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3(a+2b)=2(2a-b)\Rightarrow 3a+6b=4a-2b\Rightarrow -a+8b=0\Rightarrow b=\frac{1}{8}a$

Donc : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $b\neq 2a$: $\frac{a+2b}{2a-b}=\frac{2}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{8}a$

Par contraposition on a donc : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $b\neq 2a$: $b\neq\frac{1}{8}a\Rightarrow\frac{a+2b}{2a-b}\neq\frac{2}{3}$

2) Par l'absurde, supposons que : $\exists x\in\mathbb{R}:\frac{2x^2+1}{1+x^2}=2$

$\frac{2x^2+1}{1+x^2}=2\Leftrightarrow 2x^2+1=2\left(1+x^2\right)\Leftrightarrow 2x^2+1=2+2x^2\Leftrightarrow 1=2$!

C'est une contradiction car on sait que : $2\neq 1$

Ceci signifie : $\forall x\in\mathbb{R}:\frac{2x^2+1}{1+x^2}\neq 2$

3) Utilisons un Raisonnement par équivalence

Soient : $x\in\mathbb{R}^+$; On a : $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow x+1=1+x+\frac{x^2}{4}$

$\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 0=\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow 0=x^2\Leftrightarrow 0=x$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=0$

4) a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $x\geq 0$ Alors $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 1\succ 0$

Donc $\sqrt{x^2+1}\succ 0$ et on a $x\geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x\leq 0$. On a $x^2+1\succ x^2$

Donc $\sqrt{x^2+1}\succ\sqrt{x^2}$ par suite : $\sqrt{x^2+1}\succ|x|$ or $x\leq 0$

Alors on a : $\sqrt{x^2+1}\succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

n) Soit : $x\in\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\succ 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}-x\succ 0$ Car : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

5) Notons P(n) La proposition : « $2^n\geq n^2$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=4:2^4=16$ et $4^2=16$ donc $2^4\geq 4^2$

Donc P(4) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\geq 4$: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq n^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq(n+1)^2$??

On a : $(n+1)^2=n^2+2n+1$ et $n\geq 4\Rightarrow n\succ 2\Rightarrow n\times n\succ 2n\Rightarrow n^2\succ 2n\Rightarrow n^2-1\geq 2n\Rightarrow n^2\geq 2n+1$

$\Rightarrow n^2+n^2\geq n^2+2n+1\Rightarrow 2n^2\geq(n+1)^2$

On a : $2^n \geq n^2 \Rightarrow 2\times 2^n \geq 2n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Donc P(n+1) est vraie.

On conclut par récurrence que : $\forall n \geq 4 :\ 2^n \geq n^2$

Exercice5 : Soit $(a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$ tel que : $a+b+c=1$

1) Montrer que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$

2) Déduire que : $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

3) Montrer que : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 9$

Solution : 1) Montrons que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$: $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$

2) Déduisons que : $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

On a : $a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$\Rightarrow 2ab+2ac+2bc=1-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

On a :D'apés1) : $a^2+b^2 \geq 2ab$ et $a^2+c^2 \geq 2ac$ et $b^2+c^2 \geq 2bc$ et la somme de ces inégalités

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2(ab+ac+bc)$

$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 1-\left(a^2+b^2+c^2\right) \Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 1$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

3)Montrons que : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 9$

On a : $a+b+c=1 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\left(\underbrace{a+b+c}_{=1}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3+\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)+\left(\dfrac{a^2+c^2}{ac}\right)+\left(\dfrac{b^2+c^2}{bc}\right)$

Comme : $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ et $\dfrac{a^2+c^2}{ac} \geq 2$ et $\dfrac{b^2+c^2}{bc} \geq 2$

Alors : $\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 3+2+2+2 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 9$

Exercice6 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}.$$

Solution : notons P(n) La proposition "$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$ et $\frac{1\times(1+3)}{4\times(1+1)\times(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{6}$

Donc $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$. Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$??

$$\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}\right)+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

Car d'après l'hypothèse de récurrence on a : $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$

$$\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}\right)+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)^2}{4\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$=\frac{n\times(n+3)^2+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}=\frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}$ On remarque : -1 est racine du polynôme : n^3+6n^2+9n+4 donc divisible par $n+1$ et par la division euclidienne on trouve que :

$n^3+6n^2+9n+4=(n+1)(n^2+5n+4)$

$\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+5n+4}{4\times(n+2)(n+3)}$ et on remarque : -1 est racine du polynôme : n^2+5n+4 donc divisible par $n+1$ et par la division euclidienne on trouve que :

$n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}.$$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

Solution : $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$: On va Opérer par disjonction de cas :

1ére cas : $m=0$ L'équation devient : $-4x+3=0$ c'est à dire : $x=\frac{3}{4}$ et Par suite : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

2ére cas : $m\neq 0$ c'est une équation du second degré :

$\Delta'=b'^2-ac=(m+2)^2-m\times(m+3)=m^2+4m+4-m^2-3m=m+4$

Si : $m=-4$ alors : $\Delta'=0$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{-b'}{a}=\frac{m+2}{m}=\frac{-4+2}{-4}=\frac{1}{2}$ par suite : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $m\succ -4$ ($m\neq 0$) alors : $\Delta'\succ 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m}$ Et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}$

Par suite : $S=\left\{\frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m};\frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}\right\}$

Si : $m\prec -4$ alors : $\Delta'\prec 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S=\varnothing$

Exercice8 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{n^2+4n+7}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+4n+7}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+4n+7}=m$

$\sqrt{n^2+4n+7}=m\Leftrightarrow n^2+4n+7=m^2\Leftrightarrow n^2+2\times n\times 2+2^2+3=m^2\Leftrightarrow (n+2)^2+3=m^2$

Donc : $(n+2)^2<m^2$ et comme : $(n+3)^2=n^2+6n+9$

Alors : $(n+3)^2-m^2=(n^2+6n+9)-(n^2+4n+7)=2n+2\succ 0$

On a alors : $(n+2)^2<m^2<(n+3)^2$ c'est-à-dire : $n+2<m<n+3$

C'est-à-dire : $n+2<m<(n+2)+1$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n+2$ *et* $n+3$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{n^2+4n+7}\notin\mathbb{N}$

Exercice9 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{6n-2}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{3n+1}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{1}{12}\in B$ et $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrer que : $A\subset B$

3) Est-ce qu'on a : $A=B$?

Solution :1) a) Montrons que : $\frac{1}{12}\in B$

$\frac{1}{12}\in B\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{3n+1}{12}\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/3n+1=1$

$\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/3n=0\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=0\in\mathbb{Z}}$

Il suffit de prendre : $n=0$

On peut vérifier que : $\frac{3n+1}{12}=\frac{3\times 0+1}{12}=\frac{1}{12}$

Par suite : $\frac{1}{12}\in B$

b) Montrons que : $\frac{1}{12} \notin A$

Supposons par l'absurde que : $\frac{1}{12} \in A$

$\frac{1}{12} \in B \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / \frac{1}{12} = \frac{6n-2}{12}$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / 6n-2=1$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / 6n=3 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / \boxed{n=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}}$

Contradiction : Donc : $\frac{1}{12} \notin A$

2) Montrons que : $A \subset B$

Soit : $r \in A$ Montrons que : $r \in B$?

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / r = \frac{6n-2}{12}$

Pour montrer que : $r \in B$ Il suffit de trouver un : $n' \in \mathbb{Z}$ tel que : $r = \frac{3n'+1}{12}$

1ier méthode : $r = \frac{3n'+1}{12}$ et $r = \frac{6n-2}{12}$

Donc : $\frac{3n'+1}{12} = \frac{6n-2}{12}$

Donc : $3n'+1 = 6n-2 \Leftrightarrow 3n' = 6n-3 \Leftrightarrow n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$

Donc : Il suffit de prendre : $n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$

Par suite : $r \in B$

Conclusion : $A \subset B$

2ier méthode : Pour montrer que : $r \in B$ Il suffit de trouver un : $n' \in \mathbb{Z}$ tel que : $r = \frac{3n'+1}{12}$

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / r = \frac{6n-2}{12}$

$r = \frac{6n-2}{12} = \frac{3\times 2n-2}{12} = \frac{3\times 2n-3+3-2}{12}$

$r = \frac{3\times(2n-1)+1}{12} = \frac{3\times n'+1}{12}$

Avec : $n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$ car $n \in \mathbb{Z}$

Donc : $\exists n' \in \mathbb{Z} / r = \frac{3n'+1}{12}$; Par suite : $r \in B$

Conclusion : $A \subset B$

3) Comme : $\frac{1}{12} \in B$ et $\frac{1}{12} \notin A$ alors : $B \not\subset A$

Par suite : $A \neq B$

Exercice10 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

1)Montrons que : A ∪ B = A ∩ B $\Longrightarrow$ A = B

2) Monter que : $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

3) Monter que : $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Solution : 1) Pour ce faire, nous allons utiliser une technique très importante : la double inclusion.
Le principe est d'utiliser l'équivalence suivante :
A = B équivaut à A ⊆ B et B ⊆ A.

- Montrons que A ⊆ B. Par définition de l'inclusion, nous devons donc montrer que :

Pour tout a ∈ A, on a que a ∈ B. Soit : a ∈ A.
Par définition de l'union, an a alors que : a ∈ A ∪ B. Or, A ∪ B = A ∩ B, donc : a ∈ A ∩ B.
Par définition de l'intersection, on a alors a ∈ B.
Conclusion : Pour tout a ∈ A, on a que : a ∈ B,
Donc : A ⊆ B.

- Montrons que B ⊆ A. L'énoncé est symétrique en A et B, et A ⊆ B, donc B ⊆ A.

Conclusion : On a bien montré que : A ⊆ B et B ⊆ A,
C'est-à-dire : A = B

2) *Remarque :* $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de Morgan)

$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

$(A \setminus B) \setminus C = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$

3) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \setminus (\overline{B \cup D}) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice11 : Soient l'ensemble :
$L = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $G = [-1;1]$

1) Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L = A \times B$
2) Monter que : $L \subset G^2$ et $L \neq G^2$

Solution : On suppose : qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L = A \times B$
On a : $(1;0) \in L$ et $(0;1) \in L$
Donc : $1 \in A$ et $1 \in B$ car $L = A \times B$
Donc : $(1;1) \in A \times B$ cad $(1;1) \in L$
Donc contradiction car : $1^2 + 1^2 \succ 1$
Conclusion il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L = A \times B$
2) Montrons que : $L \subset G^2$ et $L \neq G^2$
Soit un élément $(x;y) \in L$ montrons que $(x;y) \in G^2$?
$(x;y) \in L \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$
Comme : $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ et $y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$
Alors : $x^2 \leq 1$ et $y^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1}$ et $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$
$\Rightarrow |x| \leq \sqrt{1}$ et $|y| \leq \sqrt{1} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow x \in [-1;1]$ et $y \in [-1;1] \Rightarrow (x;y) \in G^2$
Par suite : $L \subset G^2$
Comme : $1 \in G$ Donc : $(1;1) \in G^2$
Mais : $(1;1) \notin L$ car : $1^2 + 1^2 \succ 1$
Alors : $L \neq G^2$

Exercice12 : Soient les applications suivantes : $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x \end{matrix}$ et $g : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{matrix}$

1) Montrer que : $f([-1;1]) = [-1;3]$

2) Déterminer : $g^{-1}(]1;2])$

Solution :1) Montrons que : $f([-1;1]) = [-1;3]$

On raisonne par double inclusion :

a) Montrons que : $f\left(\left[-1;1\right]\right)\subset\left[-1;3\right]$

Soit : $x\in\left[-1;1\right]$ Montrons que : $f\left(x\right)\in\left[-1;3\right]$ C'est-à-dire Montrons que : $-1\leq f\left(x\right)\leq 3$

- ✓ $f\left(x\right)-\left(-1\right)=x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2\geq 0$

Donc : $-1\leq f\left(x\right)$

- ✓ $f\left(x\right)-3=x^2+2x+1-1-3=\left(x+1\right)^2-4$

$x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow 0\leq x+1\leq 2\Rightarrow 0\leq\left(x+1\right)^2\leq 4\Rightarrow\left(x+1\right)^2-4\leq 0$

Donc : $f\left(x\right)\leq -1$

Par suite : $-1\leq f\left(x\right)\leq 3$ C'est-à-dire $f\left(x\right)\in\left[-1;3\right]$

Alors : $f\left(\left[-1;1\right]\right)\subset\left[-1;3\right]$

b) Inversement montrons que : $\left[-1;3\right]\subset f\left(\left[-1;1\right]\right)$

Soit : $y\in\left[-1;3\right]$; Montrons que : $\exists x\in\left[-1;1\right]$ tel que : $f\left(x\right)=y$?

$f\left(x\right)=y\Leftrightarrow x^2+2x=y\Leftrightarrow x^2+2x+1=y+1\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2=y+1$

Comme : $y\in\left[-1;3\right]$ alors : $y+1\geq 0$

Comme : $x\in\left[-1;1\right]$ alors : $x+1\geq 0\Leftrightarrow x+1=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}-1$

Comme : $y\in\left[-1;3\right]$ alors : $0\leq y+1\leq 4$

Alors : $0\leq\sqrt{y+1}\leq 2$

Alors : $-1\leq\sqrt{y+1}-1\leq 1$c'est-à-dire : $-1\leq x\leq 1$

Donc : $\exists x\in\left[-1;1\right]$ tel que : $f\left(x\right)=y$ Ce qui signifie : $\left[-1;3\right]\subset f\left(\left[-1;1\right]\right)$

Conclusion : $f\left(\left[-1;1\right]\right)=\left[-1;3\right]$

2) $g^{-1}\left(\left]1;2\right]\right)=\left\{x\in\mathbb{R}/g\left(x\right)\in\left]1;2\right]\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/1\prec f\left(x\right)\leq 2\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/1\prec\cos x\leq 2\right\}=\varnothing$

Car $\forall x\in\mathbb{R}/-1\leq\cos x\leq 1$ donc $g^{-1}\left(D\right)=\varnothing$

Exercice13 : Soient les applications suivantes :

$f:\begin{array}{l}\left]1;+\infty\right[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{x^2+x+1}\end{array}$ et $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3-x^2\end{array}$ et h : $\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\left]-\infty;3\right]\\ x\mapsto 3-x^2\end{array}$

1) Montrer que : f est injective

2) g est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

3) Montrer que : h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left]-\infty;3\right]$et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

Solution :1) Montrons que : f est injective : Soient $x_1\in\left]1;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]1;+\infty\right[$

Montrons que : $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1=x_2$?

Supposons que : $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$

Donc : $\dfrac{x_1}{x_1{}^2+x_1+1}=\dfrac{x_2}{x_2{}^2+x_2+1}\Rightarrow x_1\left(x_2{}^2+x_2+1\right)=x_2\left(x_1{}^2+x_1+1\right)$

$\Rightarrow x_1x_2{}^2+x_1x_2+x_1=x_2x_1{}^2+x_2x_1+x_2\Rightarrow x_1x_2{}^2-x_2x_1{}^2+x_1-x_2=0\Rightarrow x_1x_2\left(x_2-x_1\right)-\left(x_2-x_1\right)=0$

$\Rightarrow\left(x_2-x_1\right)\left(x_1x_2-1\right)=0\Rightarrow x_2-x_1=0\ \ ou\ \ x_1\times x_2-1=0\Rightarrow x_1=x_2\ \ ou\ \ x_1\times x_2=1$

Or : $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$ $\Rightarrow x_1 \succ 1$ et $x_2 \succ 1 \Rightarrow x_1 \times x_2 \succ 1$ $\Rightarrow x_1 \times x_2 \neq 1$

Donc : $\frac{x_1}{x_1^2+x_1+1}=\frac{x_2}{x_2^2+x_2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite : f est injective

2) On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ On a : $g(x) \leq 3$

Donc par exemple l'équation : $g(x)=4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : g est non surjective

3)a) Montrons que : h est injective : Soient $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Montrons que : $h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow 3-x_1^2=3-x_2^2 \Rightarrow -x_1^2=-x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1|=|x_2|$

Or $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc : $h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc : h est injective

b) Montrons que : h est surjective

Soient $y \in]-\infty;3]$: Résolvons l'équation : $h(x)=y$ dans $\mathbb{R}^+$

$h(x)=y \Leftrightarrow 3-x^2=y \Leftrightarrow x^2=3-y$ Or $y \in]-\infty;3]$ donc $y \leq 3$ c'est-à-dire : $0 \leq 3-y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$ Car $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y} \in]-\infty;3])(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+)(h(x)=y)$

Donc : h est surjective

c)Alors : h est injective et surjective par suite : h est bijective

$\begin{cases} h(x)=y \\ x \in [0;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=h^{-1}(y)=\sqrt{3-y} \\ y \in]-\infty;3] \end{cases}$; Donc : $\forall x \in]-\infty;3]$; $h^{-1}(x)=\sqrt{3-x}$

$h^{-1}:]-\infty;3] \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{3-x}$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+4x+1 \end{array}$

1) f est-elle injective ?

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq -3$

b) f est-elle surjective ?

Solution : 1) Si je trouve : $x \neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Methode1 : $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x^2+4x+1=y^2+4y+1$

$\Leftrightarrow x^2+4x=y^2+4y \Leftrightarrow x^2-y^2+4x-4y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)+4(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+4)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \quad ou \quad x+y+4=0$

$\Leftrightarrow x=y \quad ou \quad \boxed{x+y=-4}$

Si je prends : $x=0$ et $y=-4$ alors : $\boxed{x+y=-4}$

On a : $f(0)=f(-4)=0$ mais $0 \neq -4$

En effet : $f(-4)=(-4)^2+4(-4)+1=1$ et $f(0)=0^2+4\times 0+1=1$

Donc : f n'est pas injective

<u>Methode2 :</u> On peut répondre directement comme suit : $f(x)=x^2+4x+1$

On résout par exemple l'équation : $f(x)=c$

$f(x)=1 \Leftrightarrow x^2+4x+1=1 \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0 \Leftrightarrow x+4=0 \ ou \ x=0 \ \Leftrightarrow x=-4 \ ou \ x=0$

On a : $f(0)=f(-4)=0$ mais $0\neq -4$

Donc : le réel 1 a deux antécédents différents par f
Ceci signifie que l'application f n'est pas injective.

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$; Montrons que : $f(x)\geq -3$

$f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)\geq -3$

b) Par exemple : - 4 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=-4$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

Exercice15 : Soit la fonction φ définie par :
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z}\\ x &\mapsto \begin{cases}\dfrac{x}{2} & si \ \ x \ est \ \ pair\\ -\dfrac{x+1}{2} & si \ \ x \ est \ impair\end{cases}\end{aligned}$$

Montrer que φ est une bijection

Solution : Vérifions que φ est injective.

Supposons que $\varphi(x)=\varphi(y)$ alors

• si $\varphi(x)\geq 0$ alors x est pair, y aussi

$\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}\Rightarrow x=y$

• si $\varphi(x)\prec 0$ alors x et y sont impairs

$\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow -\dfrac{x+1}{2}=-\dfrac{y+1}{2}\Rightarrow x+1=y+1\Rightarrow x=y$

Donc : φ est injective.

Vérifions que ϕ est surjective.

Soit $n\in\mathbb{N}$ alors $\varphi(2n)=n$, et $2n\in\mathbb{N}$.

Soit $m\in\mathbb{Z}$ et $m\prec 0$

Alors : $\varphi(-2m-1)=m$ avec $-2m-1\in\mathbb{N}$

Donc : φ est surjective.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien