http://www.xriadiat.com **DL1: K** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Nier les assertions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \neq 0$

2) $(\forall M \succ 0);(\exists A \geq 0);\forall x \succ A; f(x) \succ M$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \succ 0 \Rightarrow x \leq 0$

4) $(\forall \varepsilon \succ 0);(\exists \alpha \succ 0)\left(\forall (x;y) \in I^2\right): |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

Solution :1) $(\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0$

2) $(\exists M \succ 0);(\forall A \geq 0);\exists x \succ A; f(x) \leq M$

3) $(\exists x \in \mathbb{R}); f(x) \succ 0 \ et\ x \succ 0$

4) $(\exists \varepsilon \succ 0);(\forall \alpha \succ 0)\left(\exists (x;y) \in I^2\right): |x-y| \leq \alpha \ \ et\ |f(x)-f(y)| \succ \varepsilon$

Exercice2 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \sqrt{1+x^2} \neq x+1$

4) Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$: $(S): \begin{cases} 5x-4z \succ 1 \\ 4y-5x \geq 3 \\ y-z \leq 1 \end{cases}$

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

6) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$: $x+y = 1+xy \Rightarrow x=1 \ ou\ \ y=1$.

7) Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

8) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2-x+1$.

Solution : 1) Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2k'+1$ avec $k' = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$. et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair.

Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x+2y-xy-2 = 2 \Rightarrow x = 2$ ou $y = 2$

On a : $2x+2y-xy-2 = 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-4 = 0$

$\Rightarrow x(2-y)-2(2-y) = 0 \Rightarrow (2-y)(x-2) = 0$

$\Rightarrow 2-y = 0$ ou $x-2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $x = 2$

Donc : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

3) Par l'absurde, supposons que : $\exists x \in \mathbb{R}^{*+} : \sqrt{1+x^2} = x+1$

$\sqrt{1+x^2} = x+1 \Rightarrow 1+x^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 1+x^2 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$!

C'est une contradiction car on sait que : $x \in \mathbb{R}^{*+}$

Ceci signifie : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \sqrt{1+x^2} \neq x+1$

4) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$:

Donc : $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} 5x-4z \succ 1 \\ 4y-5x \geq 3 \\ y-z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-4z \succ 1 & (1) \\ 4y-5x \geq 3 & (2) \\ y-z \leq 1 \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} 4y-4z \succ 4 \\ y-z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z \succ 1 \\ y-z \leq 1 \end{cases}$

Ce qui est contradictoire

Donc : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$

5) On a : $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+1 \leq x \leq \frac{1}{2}+1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}}$

On a : $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ donc : $1 \leq 2x \leq 3$ par suite : $2 \leq 2x+1 \leq 4$ Alors : $\boxed{\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}}$

On a : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| = \left|(x-1) \times \frac{1}{2x+1}\right| = |x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right|$

On a aussi : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ et puisque $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ et donc $\left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{2}$

On a donc : $\begin{cases} \left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{2} \\ |x-1| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ ce qui donne : $|x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

Donc : : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

6) Soient : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$: $x+y = 1+xy \Rightarrow x-xy+y-1=0 \Rightarrow x(1-y)-(1-y)=0$

$\Rightarrow (1-y)(x-1)=0 \Rightarrow 1-y=0 \ ou \ x-1=0 \Rightarrow y=1 ou \ x=1$

7) On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 \prec n+2$

Donc $0 \prec \frac{n+1}{n+2} \prec 1$ alors : $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

8) On va Opérer par disjonction de cas i.e. déterminer un énoncé Q tel que :
Q ⇒ P et non(Q) ⇒ P soient vraies
Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.
Premier cas : $x \succ 1$: Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1 \geq 0$ Ainsi $x^2-x+1 \geq |x-1|$

Deuxième cas : $x \leq 1$. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $\left(x^2-x+1\right)+\left(x-1\right)=x^2-x+1+x-1=x^2\geq 0$ et donc $x^2-x+1\geq\left|x-1\right|$

Conclusion : Dans tous les cas : $x^2-x+1\geq\left|x-1\right|$.

Exercice3 : Montrer par récurrence que :

1) $\forall n\in\mathbb{N};\quad 1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)=\left(n+1\right)^2$

3) $\forall n\geq 5:\ 2^n\geq 6n$

4) $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

5) $\forall n\in\mathbb{N}$; 7^n-1 est divisible par 6

Solution : Notons P(n) La proposition suivante : "$1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$".

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $2^0=1$ et $2^{0+1}-1=2-1=1$ donc $1=1$.
Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$: Montrons alors que : $1+2+2^2+2^3...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$??

On a : $1+2+2^2+2^3...+2^n+2^{n+1}=\left(1+2+2^2+2^3...+2^n\right)+2^{n+1}$

D'après l'hypothèse de récurrence On a : $1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$

Donc : $1+2+2^2+2^3...+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire :
$\forall n\in\mathbb{N};\quad 1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$.

2)Notons P(n) La proposition « $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)=\left(n+1\right)^2$ »

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $\left(1+1\right)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)+\left(2n+3\right)=\left(n+2\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)+\left(2n+3\right)$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2$

Donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2+\left(2n+3\right)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

Donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\left(n+2\right)^2$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)=\left(n+1\right)^2$

3)Notons P(n) La proposition : « $n \geq 5$; $2^n \geq 6n$ »
1étapes : Initialisation : Pour $n = 5 : 2^5 = 32$ et $6 \times 5 = 30$ donc $2^5 \geq 6 \times 5$
Donc P (5) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n \geq 6n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $2^{n+1} \geq 6(n+1)$??
Or, puisque $2^n \geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
Donc : $2^n \times 2 \geq 6n \times 2$ donc $2^{n+1} \geq 12n$ **(1)**
Or on remarque que : $12n \geq 6(n+1)$ **(2)**
En effet : $12n - 6(n+1) = 6n - 6 \geq 0$
Car : $n \geq 5$ donc $6n \geq 30$ c'est-à-dire : $6n - 6 \geq 24 \geq 0$
On conclut par récurrence que : Pour tout $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$
4) Notons P(n) La proposition « $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$ »
L'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3 + 2 \times 0 = 0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$??

$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1)$

$= 3(k + n^2 + n + 1) = 3k'$ Avec $k' = k + n^2 + n + 1$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $n^3 + 2n$ est divisible par 3

5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n - 1$ est divisible par 6
1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $7^0 - 1 = 0$ est un multiple de 6
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 7^n - 1 = 6k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 7^{n+1} - 1 = 6k'$??

$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7^n \times (6+1) - 1 = 6 \times 7^n + 7^n - 1 = 6 \times 7^n + 6k = 6(7^n + k) = 6k'$ avec $k' = 7^n + k$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $7^n - 1$ est divisible par 6

Exercice4 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{6n + 2023}{100} \notin \mathbb{Z}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{6n + 2023}{100} \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{Z}$ et $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{6n + 2023}{100} = m$

$\frac{6n + 2023}{100} = m \Leftrightarrow 6n + 2023 = 100m \Rightarrow 2023 = 100m - 6n \Rightarrow 2023 = 2(50m - 3n) \Rightarrow 2025 = 2k$ avec
$k = 50m - 3n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 2023$ est pair
C'est une contradiction car on sait que : 2023 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{4n+2026} \notin \mathbb{N}$

Exercice5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-3} = -x+5$

Solution : Remarque : La relation $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-3 \geq 0$ Signifie que : $x \geq 3$

L'équation est donc définie sur : $D_E = [3, +\infty[$

Méthode1 : Soit $x \in D_E = [3, +\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré : $\sqrt{x-3} = -x+5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}^2 = (-x+5)^2$ et $-x+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x-3 = x^2 - 10x + 25$ et $-x \geq -5 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$ et $x \leq 5$

Le discriminant de : $x^2 - 11x + 28 = 0$ est : $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 28 = 121 - 112 = 9 > 0$ et ses solutions sont :

$x_1 = \dfrac{11-\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{8}{2} = 4 \in D_E$ et $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{14}{2} = 7 \notin D_E$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in D_E$

Par conséquent : $S = \{4\}$

Méthode2 : On va Opérer par disjonction de cas : Soit $x \in D_E = [3, +\infty[$

<u>Premier cas :</u> Si $-x+5 \prec 0$ c'est-à-dire si $x \in]5, +\infty[$

Alors : pas possible (négatif = positifs…)

Donc : $S_1 = \varnothing$

<u>2 ieme cas :</u> Si $-x+5 \geq 0$ c'est-à-dire si $x \in [3;5]$

$\sqrt{x-3} = -x+5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}^2 = (-x+5)^2 \Leftrightarrow x-3 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow: x^2 - 11x + 28 = 0$

Le discriminant de : $x^2 - 11x + 28 = 0$ est : $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 28 = 121 - 112 = 9 > 0$ et ses solutions sont :

$x_1 = \dfrac{11-\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{8}{2} = 4 \in [3;5]$ et $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{14}{2} = 7 \notin [3;5]$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in D_E$

Par suite : $S_2 = \{4\}$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 = \{4\}$

Exercice6 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $E = \left\{ k \in \mathbb{Z} / |k-1| \leq \dfrac{5}{3} \right\}$

2) $F = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \dfrac{n+1}{2n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

3) $G = \left\{ n \in \mathbb{N} / \dfrac{3n+2}{n-1} \in \mathbb{Z} \right\}$

4) $H = \left\{ (n;m) \in \mathbb{N}^2 / n + 2m = 11 \right\}$

Solution : : $k \in E \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ et $|k-1| \leq \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{5}{3} \leq k-1 \leq \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{5}{3} + 1 \leq k \leq \dfrac{5}{3} + 1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \leq k \leq \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow k \in \{0;1;2\}$

Donc : $E = \{0;1;2\}$

2) $F=\left\{n\in\mathbb{Z}/\dfrac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit : $n\in\mathbb{Z}$: $n\in F\Leftrightarrow n\in\mathbb{Z}\ et\ \dfrac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2\times\dfrac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{2n+2}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{2n+1+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{2n+1}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2n+1/1\Rightarrow 2n+1\in\{-1;1\}$

$\Rightarrow 2n+1=-1\ \ ou\ \ 2n+1=1\ \Rightarrow 2n=-2\ \ ou\ \ 2n=0\Rightarrow n=-1\ \ ou\ \ n=0\ \Rightarrow n\in\{-1;0\}$

Donc : $F\subset\{-1;0\}$

Montrons que : $\{-1;0\}\subset F$

On a : $0\in F$ car : $0\in\mathbb{Z}\ et\ \dfrac{0+1}{2\times0+1}=1\in\mathbb{Z}$

Et aussi on a : $-1\in F$ car : $-1\in\mathbb{Z}\ et\ \dfrac{-1+1}{2\times(-1)+1}=\dfrac{0}{-1}=0\in\mathbb{Z}$

Conclusion : $F=\{-1;0\}$ l'extension de F

3) $G=\left\{n\in\mathbb{N}/\dfrac{3n+2}{n-1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit : $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{3n+2}{n-1}=\dfrac{3n-3+3+2}{n-1}=\dfrac{3(n-1)}{n-1}+\dfrac{5}{n-1}=3+\dfrac{5}{n-1}$

$n\in G\Leftrightarrow n\in\mathbb{N}\ \ et\ 3+\dfrac{5}{n-1}\in\mathbb{Z}\ \ \Rightarrow n\in\mathbb{N}\ \ et\ \dfrac{5}{n-1}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow n\in\mathbb{N}\ \ et\ \dfrac{5}{n-1}\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow n\in\mathbb{N}\ \ et\ \ n-1/5$

$\Rightarrow n\in\mathbb{N}\ \ et\ \ n-1\in\{-1;1;-5;5\}$

$\Rightarrow n\in\mathbb{N}\ \ et\ \ n\in\{0;2;6\}$

Donc : $G\subset\{0;2;6\}$

Montrons que : $\{0;2;6\}\subset G$

On a : $0\in G$ car : $0\in\mathbb{N}\ et\ \dfrac{3\times0+2}{0-1}=-2\in\mathbb{Z}$

Et aussi on a : $2\in G$ car : $2\in\mathbb{N}\ et\ \dfrac{3\times2+2}{2-1}=8\in\mathbb{Z}$

Et aussi on a : $6\in G$ car : $6\in\mathbb{N}\ et\ \dfrac{3\times6+2}{6-1}=4\in\mathbb{Z}$

Conclusion : $G=\{0;2;6\}$ l'extension de G

4) $H=\left\{(n;m)\in\mathbb{N}^2/n+2m=11\right\}$

Soit : $(n;m)\in\mathbb{N}^2$

$(n;m)\in H\Leftrightarrow(n;m)\in\mathbb{N}^2\ \ et\ \ n+2m=11$

$\Leftrightarrow(n;m)\in\mathbb{N}^2\ \ et\ \ 2m=11-n$

$\Leftrightarrow(n;m)\in\mathbb{N}^2\ \ et\ \ 2m\in\{0;2;4;6;8;10\}$

$2m=0 \Leftrightarrow m=0 \Leftrightarrow n=11$
$2m=2 \Leftrightarrow m=1 \Leftrightarrow n=9$
$2m=4 \Leftrightarrow m=2 \Leftrightarrow n=7$
$2m=6 \Leftrightarrow m=3 \Leftrightarrow n=5$
$2m=8 \Leftrightarrow m=4 \Leftrightarrow n=3$
$2m=10 \Leftrightarrow m=5 \Leftrightarrow n=1$

Donc : $H=\{(11;0);(9;1);(7;2);(5;3);(3;4);(1;5)\}$

Exercice7 : $A=\{x\in\mathbb{R}/|x+1|\succ 3\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+2x\succ 15\}$

1)Ecrire en compréhension les ensembles : $\overline{A}$ et $\overline{B}$
2) Comparer : $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Solution :1) $x\in\overline{A} \Leftrightarrow x\notin A \Leftrightarrow |x+1|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x+1\le 3 \Leftrightarrow -4\le x\le 2$

Donc on a : $x\in\overline{A} \Leftrightarrow x\in[-4;2]$

Donc : $\overline{A}=[-4;2]$

$x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\notin B \Leftrightarrow x^2+2x\le 15 \Leftrightarrow x^2+2x-15\le 0$

$\Delta=64\succ 0$ et $x_1=-5$ et $x_2=3$

Donc on a : $x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in[-5;3]$

Donc : $\overline{B}=[-5;3]$

2)On a : $\overline{A}=[-4;2]$ et $\overline{B}=[-5;3]$

Donc : $\overline{A}\subset\overline{B}$

Exercice8 : Soit l'ensemble suivant : $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}/n\in\mathbb{N}^*\ et\ m\in\mathbb{N}^*\right\}$

1) Montrer que : $0\notin A$ et $\frac{1}{2}\in A$

2) Montrer que : $A\subset]0;1]$

3) Est-ce que $A=]0;1]$?

Solution :1) a) Montrons que : $0\notin A$
Supposons par l'absurde que : $0\in A$

$0\in A \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*\ et\ \exists m\in\mathbb{N}^*/0=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}$

$0=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m} \Leftrightarrow \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{n\times m} \Leftrightarrow \frac{n+m}{n\times m}=\frac{1}{n\times m}$

$\Leftrightarrow n+m=1$ et $n\in\mathbb{N}^*\ et\ \exists m\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n+(m-1)=0$ et $n\in\mathbb{N}^*\ et\ \exists m\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n=0\ et\ m-1=0$ car $n\in\mathbb{N}^*\ et\ m-1\in\mathbb{N}$

Contradiction : $n\in\mathbb{N}^*\ et\ n=0$

Donc : $0\notin A$

b) Montrons que : $\frac{1}{2}\in A$

$\frac{1}{2}\in A \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*\ et\ \exists m\in\mathbb{N}^*/\frac{1}{2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et\ \exists m \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{2} = \frac{m+n-1}{n\times m}$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et\ \exists m \in \mathbb{N}^* / n\times m = 2m+2n-2$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et\ \exists m \in \mathbb{N}^* / n\times m - 2m - 2n + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et\ \exists m \in \mathbb{N}^* / m(n-2) - 2(n-2) - 4 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et\ \exists m \in \mathbb{N}^* / (n-2)(m-2) = 2$ Vraie

Il suffit de prendre : $n-2=1\ et\ m-2=2$

C'est-à-dire : Il suffit de prendre : $n=3\ et\ m=4$

On peut vérifier que : $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3\times 4}$ car : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3\times 4} = \frac{7}{12}-\frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Par suite : $\frac{1}{2} \in A$

2) Montrons que : $A \subset]0;1]$

Soit : $r \in A$ Montrons que : $r \in]0;1]$?

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ et\ \exists m \in \mathbb{N}^* / r = \frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}$

On va raisonner par équivalence : $0 \prec \frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m} \le 1 \Leftrightarrow 0 \prec \frac{m+n-1}{n\times m} \le 1$

$\Leftrightarrow 0\times n\times m \prec m+n-1 \le 1\times n\times m$

$\Leftrightarrow 0 \prec m+n-1 \le n\times m \Leftrightarrow 0 \prec m+n-1\ et\ m+n-1 \le n\times m$

$\Leftrightarrow 0 \prec m+n-1\ et\ m+n-n\times m-1 \le 0$

$\Leftrightarrow 0 \prec m+n-1\ et\ m(1-n)+(n-1) \le 0$

$\Leftrightarrow 0 \prec m+n-1\ et\ (n-1)(1-m) \le 0$

Or on a : $n \in \mathbb{N}^*$ donc : $n \ge 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$ donc : $m \ge 1$

Donc : $n+m-1 \ge 2-1 \succ 0$

Et On a : $n \ge 1$ et $m \ge 1$ donc : $n-1 \ge 0$ et $m-1 \ge 0$

Par suite : $(n-1)(1-m) \le 0$

Alors : $0 \prec m+n-1\ et\ (n-1)(1-m) \le 0$ vraie

Par suite : $0 \prec \frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m} \le 1$ vraie

Conclusion : $A \subset]0;1]$

3) Est-ce que $A =]0;1]$?

On remarque que : $A = \left\{ \frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m} / n \in \mathbb{N}^*\ et\ m \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{Q}$

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0;1]$ mais $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ donc : $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$

Conclusion : $A \ne]0;1]$

Exercice9 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

1)Démontrer l'implication suivante : $\begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \\ C\subset A \end{cases} \Rightarrow A=B=C$

2)Monter que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases} \Leftrightarrow A\subset B$

Solution : 1) On suppose que : $\begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \\ C\subset A \end{cases}$ Montrons que : $A=B=C$?

On a : $A\subset B$ et $B\subset C$ alors : $A\subset C$
On a : $C\subset A$ et $A\subset C$ alors : $A=C$
On a : $B\subset C$ et $C\subset A$ alors : $B\subset A$
On a : $A\subset B$ et $B\subset A$ alors : $A=B$
On a : $A=B$ et $A=C$ alors : $A=B=C$

2) $\Rightarrow$) On suppose que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

Montrons que $A\subset B$???
Conseils méthodologiques :
Pour montrer que $A\subset B$, on montre que : $x\in A \Rightarrow x\in B$
Soit : $x\in A \Rightarrow x\in A-C$ ou $x\in A\cap C$
Car : $A=(A-C)\cup(A\cap C)$
$\Rightarrow x\in B-C$ ou $x\in B\cap C$
$\Rightarrow x\in B$ ou $x\in B$
$\Rightarrow x\in B$
Donc : $A\subset B$

Par suite : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases} \Rightarrow A\subset B$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A\subset B$ et Montrons que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$???

a) Montrons que : $A\cap C\subset B\cap C$
Soit : $x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\in C$
$\Rightarrow x\in B \text{ et } x\in C$
$\Rightarrow x\in B\cap C$
Donc : $A\cap C\subset B\cap C$
b) Montrons que : $A-C\subset B-C$
Soit : $x\in A-C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\notin C \Rightarrow x\in B \text{ et } x\notin C$
$\Rightarrow x\in B-C$
Donc : $A-C\subset B-C$

En déduit donc que : $A\subset B \Rightarrow \begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

Conclusion : $A\subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

Exercice10 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note : $U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$
1) Montrer que pour toutes parties : A ; B ; C d'un ensemble E
a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$
b) $(A\cup C)\cap\left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}$
2) En déduire que : $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$
3) Montrer que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Solution :1) a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)=\left(A\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(B\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)\right)$
$=\left(A\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)=\varnothing\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)=B\cap\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$
b) Pour Cette égalité il suffit d'intervertir les rôles de B et C.
2) $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\left((A\cup B)\setminus(A\cup C)\right)\cup\left((A\cup C)\setminus(A\cup B)\right)$
$=\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\cap\overline{B}\right)=\overline{A}\cap\left(\left(B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)$
$=\overline{A}\cap\left((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\right)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$
3) Montrons que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
$A\cap(B\Delta C)=A\cap\left((B-C)\cup(C-B)\right)=A\cap\left(\left(B\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)\right)$
$=\left(A\cap\left(B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(A\cap\left(C\cap\overline{B}\right)\right)=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ ①
$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\left((A\cap B)-(A\cap C)\right)\cup\left((A\cap C)-(A\cap B)\right)$
$=\left((A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right)\cup\left((A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\right)=\left((A\cap B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)\right)\cup\left((A\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)$
$=\left(\left(A\cap B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(\left(A\cap C\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\right)$
$=\left(\varnothing\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(\varnothing\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\right)=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ ②
① et ② affirment que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Exercice11 : Soient les applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x-1}{x+1} \end{array}$

et les ensembles : $A=[-1;4]$ et $B=]-\infty;-1[$
1) a) Déterminer : L'image directe de A par f.
b) Déterminer : L'image réciproque de A par f.
2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\ :g(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$
b) Déterminer : $g(B)$

Solution : 1) a) On a : $f(A)=f([-1;4])=\{f(x)\in\mathbb{R}/-1\le x\le 4\}$
Or : $A=[-1;4]=[-1;0]\cup[0;4]$
Alors : $f([-1;4])=f([-1;0])\cup f([0;4])$
Il est clair que : $-1\le x\le 0\Rightarrow 0\le x^2\le 1$ et $0\le x\le 4\Rightarrow 0\le x^2\le 16$
Ainsi : $f([-1;4])=[0;1]\cup[0;16]=[0;16]$

b) $f^{-1}([-1;4]) = f^{-1}([-1;0]) \cup f^{-1}([0;4])$ Or : $f^{-1}([-1;0]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [-1;0]\}$

$f^{-1}([-1;0]) = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq f(x) \leq 0\} = \{0\}$ et $f^{-1}([0;4]) = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq f(x) \leq 4\}$

$0 \leq f(x) \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \sqrt{0} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \quad \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 2$

Ainsi : $f^{-1}([0;4]) = [-2;2]$

D'où : $f^{-1}([-1;4]) = \{0\} \cup [-2;2] = [-2;2]$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $3 - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{3x+3-4}{x+1} = \dfrac{3x-1}{x+1} = g(x)$

b) $x \in B \Leftrightarrow x \prec -1 \Leftrightarrow x+1 \prec 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{x+1} \succ 0$

$\Leftrightarrow 3 - \dfrac{4}{x+1} \succ 3 \Leftrightarrow g(x) \in]3;+\infty[$. Donc $g(B) =]3;+\infty[$

Exercice12 : Soit les applications suivantes : $\begin{array}{l} f :]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \sqrt{x^2 - x} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g :]1;+\infty[\to]2;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{2x}{x-1} \end{array}$

1)Montrer que f est injective

2)Montrer que g est surjective

Solution :1) Soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_1} = x_2 + \sqrt{x_2^2 - x_2}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 - x_1} - \sqrt{x_2^2 - x_2} = x_2 - x_1 \Rightarrow \left(\sqrt{x_1^2 - x_1} - \sqrt{x_2^2 - x_2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2$

$\Rightarrow x_1^2 - x_1 - 2\sqrt{x_2^2 - x_2}\sqrt{x_1^2 - x_1} + x_2^2 - x_2 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \Rightarrow -x_1 - x_2 - 2\sqrt{x_2^2 - x_2}\sqrt{x_1^2 - x_1} + 2x_1x_2 = 0$

$\Rightarrow -x_1 + x_1x_2 - 2\sqrt{x_2^2 - x_2}\sqrt{x_1^2 - x_1} - x_2 + x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1(x_2 - 1) - 2\sqrt{x_1(x_1 - 1)}\sqrt{x_2(x_2 - 1)} + x_2(x_1 - 1) = 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1(x_2 - 1)}\right)^2 - 2\sqrt{x_1(x_1 - 1)}\sqrt{x_2(x_2 - 1)} + \left(\sqrt{x_2(x_1 - 1)}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1(x_2 - 1)} - \sqrt{x_2(x_1 - 1)}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1(x_2 - 1)} - \sqrt{x_2(x_1 - 1)} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1(x_2 - 1)} = \sqrt{x_2(x_1 - 1)} \Rightarrow x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1)$

$\Rightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$ ou $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ Ceci signifie que l'application f est injective.

2) $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$: Soient $y \in]2;+\infty[$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$g(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x = y(x-1)$ car $x \in]1;+\infty[$ donc : $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x - xy = -y \quad \Leftrightarrow x(2-y) = -y$

$y \in]2;+\infty[$ donc $2 - y \neq 0 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{-y}{2-y} = \dfrac{y}{y-2}$

Vérifions que : $x=\frac{y}{y-2}\in\left]1;+\infty\right[$???

$\frac{y}{y-2}-1=\frac{y-y+2}{y-2}=\frac{2}{y-2}\succ 0$ car $y\in\left]2;+\infty\right[$

Donc : $x=\frac{y}{y-2}\in\left]1;+\infty\right[$

Donc $\forall y\in\left]2;+\infty\right[\ \exists x\in\left]1;+\infty\right[/ g(x)=y$

Ceci signifie que l'application g est surjective.

Exercice13 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+2x-3\end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

Solution : 1) Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Methode1 : $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x^2+2x-3=y^2+2y-3$

$\Leftrightarrow x^2+2x=y^2+2y\Leftrightarrow x^2-y^2+2x-2y=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y)+2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow(x-y)(x+y+2)=0\Leftrightarrow x-y=0\quad ou\ \ x+y+2=0$

$\Leftrightarrow x=y\quad ou\ \boxed{x+y=-2}$

Si je prends : $x=-3$ et $y=1$ alors : $\boxed{x+y=-2}$

On a : $f(1)=f(-3)=0$ mais $1\neq-3$

En effet : $f(-3)=(-3)^2+2(-3)-3=0$ et $f(1)=1^2+2-3=0$

Donc : f n'est pas injective

Methode2 : On peut répondre directement comme suit : $f(x)=x^2+2x-3$

On résout par exemple l'équation : $f(x)=c$

$f(x)=-3\Leftrightarrow x^2+2x-3=-3\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow x+2=0\ \ ou\ \ x=0\ \Leftrightarrow x=-2\ \ ou\ \ x=0$

On a : $f(0)=f(-2)=0$ mais $0\neq-2$

Donc : le réel -3 a deux antécédents différents par f
Ceci signifie que l'application f n'est pas injective.

2) $f(x)=x^2+2x-3=x^2+2x+1-1-3=(x+1)^2-4$

Donc : $f(x)-(-4)=(x+1)^2\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)\geq-4$

Par exemple : -5 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=-5$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\left[2;+\infty\right[\to\left[1;+\infty\right[\\ x\mapsto f(x)=x^2-4x+5\end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y\in\left[1;+\infty\right[$

Résolvons dans : $[2;+\infty[$ l'équation $f(x)=y$

Soit : $x\in[2;+\infty[$

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-4x+5=y \Leftrightarrow x^2-4x+4+1=y$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+1=y \Leftrightarrow (x-2)^2=y-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{y-1}$ car $y\in[1;+\infty[$

$\Leftrightarrow |x-2|=\sqrt{y-1} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{y-1}$ car $x\in[2;+\infty[$

$f(x)=y \Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}+2$

Comme : $\sqrt{y-1}+2\geq 2$ c'est-à-dire : $x\in[2;+\infty[$

Donc : $y\in[1;+\infty[$ $\exists ! x\in[2;+\infty[$ tel que : $f(x)=y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in[2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)=\sqrt{y-1}+2 \\ y\in[1;+\infty[\end{cases}$$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[$; $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$

$f^{-1}:[1;+\infty[\rightarrow[2;+\infty[$

$x\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$

Exercice15 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a) Déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b) Résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) On suppose que $C\subset A\subset B$

Résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases}$

Solution : 1) Si on a : $A\cup X=B$ alors : $X\subset B$ et $A\subset B$

Donc une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$ est $A\subset B$

b) résolution dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

$A\cup X=B \Rightarrow (A-B)\cap(A\cup X)=(B-A)\cap B$

$\Leftrightarrow [(B-A)\cap A]\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow \varnothing\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow (B-A)\cap X=B-A \Leftrightarrow B-A\subset X \Rightarrow B-A\subset X\subset B$

Inversement :

$\forall X\in P(E)$ tel que : $B-C\subset X\subset B$ est solution de l'équation : $A\cup X=B$

Et on a : $(B-A)\cup A=B$ $\quad (B-A)\cap A=\varnothing$

Donc : $A\cup X=B \Leftrightarrow X=(B-A)\cup Y$ $\quad Y\in P(E)$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\{(B-A)\cup Y ; Y\in P(E)\}$

2) $C\subset A\subset B$

$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = (B - A) \cup Y \,/\, Y \in P(E) \\ A \cap \left[(B - A) \cup Y \right] = C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = (B - A) \cup Y \,/\, Y \in P(E) \\ \left[A \cap (B - A) \right] \cup \left[A \cap Y \right] = C \end{cases}$ et puisque $A \cap (B - A) = \varnothing$ et $A \cap Y = Y$ car $Y \subset A$

Alors : $X = (B - A) \cup C$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{ (B - A) \cup C \}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien