http://www.xriadiat.com **DL1: K** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Nier les assertions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \neq 0$

2) $(\forall M \succ 0);(\exists A \geq 0);\forall x \succ A; f(x) \succ M$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \succ 0 \Rightarrow x \leq 0$

4) $(\forall \varepsilon \succ 0);(\exists \alpha \succ 0)(\forall (x;y) \in I^2): |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Exercice2 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$: $\sqrt{1+x^2} \neq x+1$

4) Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$: $(S): \begin{cases} 5x - 4z \succ 1 \\ 4y - 5x \geq 3 \\ y - z \leq 1 \end{cases}$

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

6) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$: $x + y = 1 + xy \Rightarrow x = 1$ *ou* $y = 1$.

7) Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

8) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}: |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice3 : Montrer par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$

3) $\forall n \geq 5: 2^n \geq 6n$

4) $\forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n$ est divisible par 3

5) $\forall n \in \mathbb{N}$; $7^n - 1$ est divisible par 6

Exercice4 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{Z}: \frac{6n + 2023}{100} \notin \mathbb{Z}$

Exercice5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-3} = -x + 5$

Exercice6 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $E = \left\{k \in \mathbb{Z} / |k-1| \leq \frac{5}{3}\right\}$

2) $F = \left\{n \in \mathbb{Z} / \frac{n+1}{2n+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

3) $G = \left\{n \in \mathbb{N} / \frac{3n+2}{n-1} \in \mathbb{Z}\right\}$

4) $H = \left\{(n;m) \in \mathbb{N}^2 / n + 2m = 11\right\}$

Exercice7 : $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \succ 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x \succ 15\}$

1)Ecrire en compréhension les ensembles : $\overline{A}$ et $\overline{B}$

2) Comparer : $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$

Exercice8 : Soit l'ensemble suivant : $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m} \,/\, n\in\mathbb{N}^* \text{ et } m\in\mathbb{N}^*\right\}$

1) Montrer que : $0\notin A$ et $\frac{1}{2}\in A$ 2) Montrer que : $A\subset \left]0;1\right]$ 3) Est-ce que $A=\left]0;1\right]$?

Exercice9 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

1)Démontrer l'implication suivante : $\begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \\ C\subset A \end{cases} \Rightarrow A=B=C$

2)Monter que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases} \Leftrightarrow A\subset B$

Exercice10 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note : $U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$

1) Montrer que pour toutes parties : A ; B ; C d'un ensemble E

a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$ b) $(A\cup C)\cap\left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}$

2) En déduire que : $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$

3) Montrer que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Exercice11 : Soient les applications :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ et $g:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{3x-1}{x+1}$ et les ensembles : $A=[-1;4]$ et $B=\left]-\infty;-1\right[$

1) a) Déterminer : L'image directe de A par f.

b) Déterminer : L'image réciproque de A par f.

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $g(x)=3-\frac{4}{x+1}$ b) Déterminer : $g(B)$

Exercice12 : Soit les applications suivantes : $f:\left]1;+\infty\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+\sqrt{x^2-x}$ et $g:\left]1;+\infty\right[\to\left]2;+\infty\right[$, $x\mapsto\frac{2x}{x-1}$

1)Montrer que f est injective 2) Montrer que g est surjective

Exercice13 : Soit l'application f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2+2x-3$

1) f est-elle injective ? 2) f est-elle surjective ?

Exercice14 : Soit l'application f : $[2;+\infty[\to[1;+\infty[$, $x\mapsto f(x)=x^2-4x+5$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice15 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a) Déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b) Résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) On suppose que $C\subset A\subset B$. Résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien