http://www.xriadiat.com **DL1: J** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Donner la négation des propositions suivantes et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

$P:(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\succ 0$

$Q:(\forall y\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in\mathbb{R});y\succ x$

$R:(\exists a\in\mathbb{R}^*)(\forall x\in\mathbb{R});x^2-ax+a^2=0$

$S:(\forall x\in\mathbb{R}):(x^2-|x|+1\geq 0)\ et\ |-1\leq x\leq 1|$

$T:(\forall x\in[1;+\infty[):x^2+x-2\geq 0$

$U:(\forall x\in\mathbb{R}):(x\geq 0)\ ou\ (x\leq 0)$

Solution :1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\geq 0$; $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\leq 0$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

On a : $x^2+1\succ x^2$ donc : $\sqrt{x^2+1}\succ\sqrt{x^2}$

Donc : $\sqrt{x^2+1}\succ|x|$

Donc : $\sqrt{x^2+1}-|x|\succ 0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\geq 0$ par suite : P:est vraie

$Q:(\forall y\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in\mathbb{R});y\succ x$; $\overline{Q}:(\exists y\in\mathbb{R}^+)(\exists x\in\mathbb{R});y\leq x$

$\overline{Q}:(\exists y\in\mathbb{R}^+)(\exists x\in\mathbb{R});y\leq x$ est vraie : $(\exists y\in\mathbb{R}^+)(\exists x\in\mathbb{R});1\leq 2$

Par suite : Q:est fausse

$R:(\exists a\in\mathbb{R}^*)(\forall x\in\mathbb{R});x^2-ax+a^2=0$

Montrons que : $\overline{R}:(\forall a\in\mathbb{R}^*)(\exists x\in\mathbb{R});x^2-ax+a^2\neq 0$ est vraie

Soit : $a\in\mathbb{R}^*$: x^2-ax+a^2 : $\Delta=a^2-4a^2=-3a^2\prec 0$

Donc : $x^2-ax+a^2\neq 0$

Donc : $\overline{R}$: est vraie par suite : R:est fausse

$S:(\forall x\in\mathbb{R}):(x^2-|x|+1\geq 0)\ et\ |-1\leq x\leq 1|$ est fausse car $(\forall x\in\mathbb{R}):|-1\leq x\leq 1|$ est fausse

$T:(\forall x\in[1;+\infty[):x^2+x-2\geq 0$

Soit : $x\in[1;+\infty[$

Donc : $x\geq 1$ alors : $x^2\geq 1$ et $x\geq 1$

$x^2+x\geq 2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2\geq 0$

Donc : T: $(\forall x\in[1;+\infty[):x^2+x-2\geq 0$ est vraie

Alors : $\overline{T}$: $(\exists x\in[1;+\infty[):x^2+x-2\prec 0$ est fausse

$U:(\forall x\in\mathbb{R}):(x\geq 0)\ ou\ (x\leq 0)$ est vraie

$\overline{U}:(\exists x\in\mathbb{R}):(x\prec 0)\ et\ (x\succ 0)$ est fausse

Exercice2 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}\quad x^2+y^2=x+y+2 \Leftrightarrow x=y=1$

2)Montrer que : $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^*)^2$: $x\neq y$ et $|x|<\frac{1}{4}$ et $|y-2|<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

3)Montrer que : $\forall(a;b)\in(]1;+\infty[)^2\quad a\neq b \Rightarrow a^2-2a\neq b^2-2b$

4)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $4\cos x\neq x^2-4x+12$

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; 4^n+6n-1 est divisible par 9

6) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R} : x^6-x+1\succ 0$.

Solution :1) Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication : Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Leftarrow)$ Supposons : $x=y=1$ et Montrons que : $x^2+y^2=x+y+2$

On a : $1^2+1^2=2\quad et\quad 1+1=2$ Donc : $x^2+y^2=x+y+2$

$\Rightarrow)$Supposons : $x^2+y^2=x+y+2$ et Montrons que : $x=y=1$

On a : $(x-1)^2+(y-1)^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2+y^2-2(x+y)+2=2-2\times2+2=0$

Donc : $(x-1)^2+(y-1)^2=0$

Donc : $x-1=0\quad et\quad y-1=0$

Donc : $x=1\quad et\quad y=1$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x^2+y^2=x+y+2\Leftrightarrow x=y=1$

2) Supposons : $x\neq y$ et $|x|<\frac{1}{4}$ et $|y-2|<\frac{1}{4}$

$|x|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{4}<-x<\frac{1}{4}\ (1)$

Et nous avons : $|y-2|<\frac{1}{4}$ Signifie $-\frac{1}{4}<y-2<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+2<y-2+2<\frac{1}{4}+2$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}<y<\frac{9}{4}\ (2)$

En sommant (1) et (2) nous déduisons : $\frac{6}{4}<y-x<\frac{10}{4}$ cad $\frac{3}{2}<y-x<\frac{5}{2}$

Cette inégalité est équivalente à : $\frac{2}{5}<\frac{1}{y-x}<\frac{2}{3}\ (3)$

De (2) nous déduisons : $\frac{7}{2}<2y<\frac{9}{2}\ (4)$

(3) et (4) Donnent par multiplication : $\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

3)Soit $(a;b)\in(]1;+\infty[)^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a^2-2a=b^2-2b\Rightarrow a=b$

$a^2-2a=b^2-2b\Rightarrow a^2-b^2+2b-2a=0\Rightarrow(a-b)(a+b)-2(a-b)=0\Rightarrow(a-b)(a+b-2)=0$

$\Rightarrow a-b=0\ \ ou\ \ a+b-2=0$

et comme : $a\in]1;+\infty[$ et $b\in]1;+\infty[$ alors : $a\succ1$ et $b\succ1$ et donc : $a+b\succ2$ par suite : $a+b-2\neq0$

Donc : $a^2-2a=b^2-2b\Rightarrow a=b$

Alors : Par contraposition : $\forall(a;b)\in(]1;+\infty[)^2\quad a\neq b\Rightarrow a^2-2a\neq b^2-2b$

4) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\exists x\in\mathbb{R}$; $4\cos x=x^2-4x+12$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$; $\cos x=\frac{1}{4}x^2-x+3$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$; $\cos x=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\times\frac{1}{2}x\times1+1^2+2$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$; $\cos x=\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+2$ Or : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\geq0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+2\geq2$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ $\cos x\geq2$: C'est une contradiction car on a : $-1\leq\cos x\leq1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $4\cos x\neq x^2-4x+12$

5) Montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}/4^n+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4^0+6\times0-1=0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/4^n+6n-1=9k$ donc $4^n=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{n+1}+6(n+1)-1=9k'$??

$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times4^n+6n+6-1=4\times(9k-6n+1)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$

$=36k+9-18n=9(4k+1-2n)=9k'$ avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; 4^n+6n-1 est divisible par 9

6)On va Opérer par disjonction de cas i.e. déterminer un énoncé Q tel que :

Q ⇒ P et non(Q) ⇒ P soient vraies

Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^6-x+1=x(x^5-1)+1$

Nous distinguons 3 cas :

<u>Premier cas :</u> $x\succ1$ Alors : $x^5\succ1$ donc $x^5-1\succ0$

$x^5-1\succ0$ et $x\succ1\Rightarrow x(x^5-1)\succ0\Rightarrow x(x^5-1)+1\succ0+1\Rightarrow x(x^5-1)+1\succ1\succ0$

$\Rightarrow x(x^5-1)+1\succ0\Rightarrow x^6-x+1\succ0$

<u>Deuxième cas :</u> $x\prec1$ Alors : $1-x\succ0$ et $x^6\geq0$

Donc : $x^6-x+1\succ0$

<u>Troisième cas :</u> $x=1$

$x^6-x+1=1^6-1+1=1\succ0$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}:x^6-x+1\succ0$.

Exercice3 : (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x}=x-2$

Solution : Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x\geq0$

L'équation est donc définie sur : $D_E=[0,+\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres

Sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x}=x-2$ Signifie que : $\sqrt{x}^2=(x-2)^2$ et $x\in[2,+\infty[$

Signifie que : $x=x^2-4x+4$ Signifie que : $x^2-5x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-5x+4=0$ est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=25-16=9>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1\notin D_E$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4\in D_E$

$x^2-5x+4=0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

Exercice4 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-2(m+1)x+4=0$; (E)

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2(m+1)x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-2(m+1)x+4=0$ est : $\Delta=\left[-2(m+1)\right]^2-4\times1\times4=(2m+2)^2-16$

$\Delta=(2m+2)^2-4^2=(2m+2-4)(2m+2+4)=(2m-2)(2m+6)=4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta=4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On va Opérer par disjonction de cas :

1ére cas : $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ on a ; $\Delta=4(m-1)(m+3)>0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x_1 *et* x_2 telles que :

$x_1=\frac{2(m+1)-\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}$ et $x_2=\frac{2(m+1)+\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S=\left\{(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)};(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}\right\}$

2ére cas : $m\in\left]-3;1\right[$ on a $\Delta=4(m-1)(m+3)<0$:

Donc : L'équation n'admet pas de solutions

Donc : $S=\varnothing$

3ére cas : $m=1$: on a $\Delta=4(1-1)(1+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2\times1}=m+1=2$

Donc : $S=\{2\}$

4ére cas : $m=-3$: on a $\Delta=4(-3-1)(-3+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2\times1}=-3+1=-2$

Donc : $S=\{-2\}$

Exercice5 : $A=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-1\}/\frac{5x+1}{x+1}\prec2\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\prec1\right\}$

Montrons que : $A\neq B$

Solution : a) On va écrire l'ensemble A en extension

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $x\in A\Leftrightarrow\frac{5x+1}{x+1}\prec2\Leftrightarrow\frac{5x+1}{x+1}-2\prec0\Leftrightarrow\frac{3x-1}{x+1}\prec0$

$3x-1=0\Leftrightarrow3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x-1}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$x \in A \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \prec 0 \Leftrightarrow \left]-1;\frac{1}{3}\right[$

Donc : $A = \left]-1;\frac{1}{3}\right[$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$: $x \in B \Leftrightarrow |x| \prec 1 \Leftrightarrow -1 \prec x \prec 1 \Leftrightarrow x \in \left]-1;1\right[$

Donc : $A = \left]-1;1\right[$

Donc : $A \neq B$

<u>Remarque :</u> on peut sans écrire l'ensemble A en extension

Remarquer que : $\frac{1}{2} \in B$ car $\left|\frac{1}{2}\right| \prec 1$ Mais : $\frac{1}{2} \notin A$ car : $\frac{5 \times \frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{3} \geq 2$ Donc : $A \neq B$

Exercice6 : Montrons que : $\left\{ k \in \mathbb{Z} / \frac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \right\} = \{-1;0;1\}$

Solution : On pose : $A = \left\{ k \in \mathbb{Z} / \frac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

Soit $k \in \mathbb{Z}$; $k \in A \Leftrightarrow \frac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z}$

En effet : $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |k| \in \mathbb{Z}$ est vraie (dans $\mathbb{N}$ faux)

$k \in A \Leftrightarrow \frac{|2k|}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2|k|}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2|k|+2-2}{|k|+1} \in \mathbb{Z}$

$k \in A \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |k|+1 / 2 \Leftrightarrow |k|+1 \in \{1;2\} \Leftrightarrow |k|+1 = 1 \ ou \ |k|+1 = 2$

$k \in A \Leftrightarrow |k| = 0 \ ou \ |k| = 1$

$k \in A \Leftrightarrow k = 0 \ ou \ k = -1 \ ou \ k = 1$

Donc on a : $k \in A \Leftrightarrow k \in \{-1;0;1\}$

Donc : $\left\{ k \in \mathbb{Z} / \frac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \right\} = \{-1;0;1\}$

Exercice7 : Soient les ensembles : $A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ $B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Monter que : $A \cap B = \varnothing$

Solution : On suppose que : $A \cap B \neq \varnothing$

Donc : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ et $x_0 \in B \Leftrightarrow \exists (k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2 :$ $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc $\Leftrightarrow \exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2 : \frac{\pi}{2}+2\frac{k_1\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc : $\frac{2}{5}(k_1-k_2)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow k_1-k_2=-\frac{5}{8}$ contradiction avec la faite que $k_1-k_2\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8}\notin\mathbb{Z}$ Donc : $A\cap B=\varnothing$

Exercice8 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A\cup B=A\cup C$ et $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow B=C$

Solution : On procède par double implication :

- Montrons que : $A\cup B=A\cup C$ et $A\cap B=A\cap C \Rightarrow B=C$

On suppose que (A∪B) = (A∪C) et (A∩B) = (A∩C).

Soit x∈B, donc : x∈(A∪B) et donc x∈A∪C ⇔ x∈A ou x∈C.

Si x∈A alors x∈A∩B = A∩C et donc x∈C.

Sinon, x∈C. Bilan : Si x∈B alors x∈C et donc B ⊂ C. ↔ Soit x∈C, on x∈(A∪C) et donc x∈A∪B ⇔ x∈A ou x∈B. Si x∈A alors x∈A∩C = A∩B et donc x∈B.

Sinon, x∈B. Bilan : Si x∈C alors x∈B et donc C ⊂ B.

On pourrait dire : on montre de même que C ⊂ B, en échangeant les rôles de B et de C

Conclusion : B = C

- La réciproque est évidente.

Exercice9 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E ; Monter que :

1) $A=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

3) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C} \Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Solution :1) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$

$=\left[(A\cap B)\cap(C\cup\overline{C})\right]\cup\left[(A\cap\overline{B})\cap(C\cup\overline{C})\right]$

$=\left[(A\cap B)\cap E\right]\cup\left[(A\cap\overline{B})\cap E\right]=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap E=A$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=\left[B\cup(A\cap C)\right]\cap(C\cup A)$

$=(B\cap(C\cup A))\cup((A\cap C)\cap(C\cup A))=(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)$

3) Montrons que : $\begin{cases} A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow A\cap B=A\cap C \\ A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C} \end{cases}$

$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A\cap\overline{C}}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C\Rightarrow A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap(\overline{A}\cup C)$

$\Rightarrow(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap C)\Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Inversement : $A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

D'après l'implication directe

Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Exercice10 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^4-2x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x+1 \end{array}$

1)a) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}([2;3[)$

b) f est-elle injective ?

2)a) Déterminer $f(\mathbb{R})$

b) f est-elle surjective ?

Solution :1) a) Soit $x\in\mathbb{R}$

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x^2-2=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou \ x=-\sqrt{2} \quad ou \quad x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

Donc : $f^{-1}(\{0\})=\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$

$x \in g^{-1}([2;3[) \Leftrightarrow g(x) \in [2;3[\Leftrightarrow 2 \leq g(x) \prec 3 \quad \Leftrightarrow 2 \leq 2x+1 \leq 3$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2x \prec 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2x \prec 1 \quad \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2};1\right[$$

D'où : $g^{-1}([2;3[)=\left[\frac{1}{2};1\right[$

b) f n'est pas injective car :

On a : $f(0)=f(\sqrt{2})=0$ mais $0 \neq \sqrt{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ On a : $f(x) \leq 3$

Donc par exemple l'équation : $f(x)=4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

$f^{-1}(B)=\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\}=\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq f(x) \leq 4\} \ =\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x^2 \leq 4\}=\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x^2 \leq 4\}$

$$=\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}=[-2;2]$$

Donc : $f^{-1}(B)=[-2;2]$

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x+\sqrt{x} \end{array}$

f est-elle injective ?

Solution : Soient $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+\sqrt{x_1}=x_2+\sqrt{x_2}$

$\Rightarrow (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1)=0 \Rightarrow \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$ ou $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0$

Or $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

Exercice12 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to]-\infty;3] \\ x \mapsto 3-x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$.

Solution : Soient $y \in]-\infty;3]$

Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$f(x)=y \Leftrightarrow 3-x^2=y \Leftrightarrow x^2=3-y$ Or $y \in]-\infty;3]$ donc $y \leq 3$ c'est-à-dire : $0 \leq 3-y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$ Car $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y} \in]-\infty;3])(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Exercice13 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+x+2 \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \ f(-1-x)=f(x)$

2) f est-elle injective ?

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=-\frac{1}{4}$

4) f est-elle surjective ?

5) Montrer que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Solution : 1) Montrons que : $f(-1-x)=f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(-1-x)=(-1-x)^2+(-1-x)+2$$
$$=(1+x)^2+-1-x+2=x^2+2x+1+-1-x+2$$
$$=x^2+x+2=f(x)$$

2)Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

Si je prends : $x=0$

On a : $f(-1)=f(0)$ mais $0\neq-1$

Donc : f n'est pas injective

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=1$

$$f(x)=1\Leftrightarrow x^2+x+2=1\Leftrightarrow x^2+x+1=0$$

$$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3\prec0$$

Donc : $S=\varnothing$

4)Par exemple : 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

5) Montrons que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

On raisonne par double inclusion :

a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ Montrons que : $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

C'est-à-dire Montrons que : $\frac{7}{4}\leq f(x)$

$$f(x)-\frac{7}{4}=x^2+x+2-\frac{7}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$$

$\Delta=1^2-4\times\frac{1}{4}\times1=0$ Donc : $x^2+x+\frac{1}{4}\geq0$

Donc : $f(x)-\frac{7}{4}\geq0$ C'est-à-dire $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Alors : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

a) Inversement montrons que : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y \in \left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Montrons que : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2+x+2=y \Leftrightarrow x^2+x+2-y=0$

$\Delta = 1^2-4\times(2-y) = -7+4y$

Comme : $\frac{7}{4} \le y$ alors : $-7+4y \ge 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$x=\frac{-1+\sqrt{-7+4y}}{2} \in \mathbb{R}$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{-7+4y}}{2} \in \mathbb{R}$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Donc : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Conclusion : $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{5}{2};+\infty\right[\\ x \mapsto f(x)=\frac{5}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}} \end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$: Résolvons dans : $\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ l'équation $f(x)=y$

Soit : $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$: $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{5}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=y \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=y-\frac{5}{2}$

$x+\frac{1}{4} \ge 0$ car $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ et $y-\frac{5}{2} \ge 0$ car $y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

$f(x)=y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ Et on a : $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \ge -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

Donc : $\forall y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ $\exists! x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ tel que : $f(x)=y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$; $f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ par suite : $\begin{array}{l} f^{-1}:\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\\ x \mapsto f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{array}$

Exercice15 : Soit l'ensemble dans : $E = \left]0;+\infty\right[$

Et soit l'application f : $\begin{array}{l} E\times E \to E\times E \\ (x;y) \mapsto \left(x\times y\ ;\ \frac{y}{x}\right) \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit : $(x;y)\ ;\ (x';y') \in E\times E$

Tel que : $f(x;y) = f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y) = (x';y')$??

$$f(x;y) = f(x';y') \Leftrightarrow \left(x\times y\ ;\ \frac{y}{x}\right) = \left(x'\times y'\ ;\ \frac{y'}{x'}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x\times y = x'\times y' \\ \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\times y = x'\times y' \\ yx' = y'x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\times y = x'\times y' \\ y = \frac{y'x}{x'} \end{cases} \Rightarrow x\times\frac{y'x}{x'} = x'\times y' \ et\ \ y = \frac{y'x}{x'} \Rightarrow x^2 = x'^2 \ et\ \ y = \frac{y'x}{x'} \Rightarrow x = x' \ et\ \ y = \frac{y'x}{x'}$$

Car $(x;y)\ ;\ (x';y') \in \left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[\ \Rightarrow x = x' \ et\ \ y = y' \Rightarrow (x;y) = (x';y')$

Donc : f est injective

2) Soit : $(z;t) \in E\times E$; $\exists ?(x;y) \in E\times E$

Tel que : $f(x;y) = (z;t)$??

$$f(x;y) = (z;t) \Leftrightarrow \left(x\times y\ ;\ \frac{y}{x}\right) = (z;t) \Leftrightarrow x\times y = z \ et\ \ \frac{y}{x} = t \Leftrightarrow x\times y = z \ et\ \ y = tx$$

$$\Leftrightarrow x\times tx = z \ et\ \ y = tx \Leftrightarrow x^2 = \frac{z}{t} \ et\ \ y = tx \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{z}{t}} \ et\ \ y = \sqrt{\frac{z}{t}}\, t \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{z}{t}} \ et\ \ y = \sqrt{zt}$$

Donc : f surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$$f(x;y) = (z;t) \Leftrightarrow (x;y) = f^{-1}(z;t) = \left(\sqrt{\frac{z}{t}}\ ;zt\right)$$

Donc : f^{-1} : $\begin{array}{l} E\times E \to E\times E \\ (x;y) \mapsto \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\ ;xy\right) \end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien