http://www.xriadiat.com **DL1: I** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère les assertions suivantes : P ;$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right):x\geq 2\sqrt{x}-1$

Q :$\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)\left(\exists x\in\mathbb{R}\right):xy\neq x$

1) Ecrire la négation de P et Q

2) Déterminer la valeur de vérité de P et Q

Exercice2 :1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+}:\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5\Leftrightarrow x=1$.

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}\ :x\neq y\ et\ x\times y\neq 2\Rightarrow x^2y-xy^2+2x-2y\neq 0$

3) Montrer que : $\forall x\geq 1\ ;\forall y\geq 1:x^2+y^2+xy-x-y-1=0\Rightarrow x=y=1$.

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\notin\mathbb{N}$

5) Soient $\left(x;y;z\right)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x\left(y+z\right)+y\left(x+z\right)+z\left(x+y\right)=18$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

6) Montrer que : $\forall n\geq 2$; $9/4^n-3n-1$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $3x\left|x+1\right|+x-2=0$

Exercice3 : 1) Montrer que : $\forall\left(a;b\right)\in\left(\left]0;+\infty\right[\right)^2$; $a\times b\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

2) Déduire que : $\forall\left(a;b;c;d\right)\in\left(\left]0;+\infty\right[\right)^4$; $a\times b\times c\times d\leq\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Exercice4 : (Récurrence) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$: $\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)^3=n^2\times\left(2n^2-1\right)$.

Exercice5 : On considère les ensembles suivants : $E=\left\{1;2;3;4;5;6;....;20\right\}$

A et B deux parties de E tel que : $A=\left\{x\in E\ /\ \ x=4k;k\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{x\in E\ /\ \ x=3k;k\in\mathbb{N}\right\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

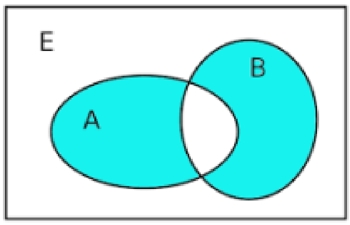
2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$;$C_E^{A\cap B}$; $C_E^A\cup C_E^B$ et $C_E^A\cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A\cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A\cup C_E^B$

Exercice6 : Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. A et B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$A\Delta B==\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$



1) Montrer que :$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.

3) Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :

a) $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$

b) $(A\Delta B)\,\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$

c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$

d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,

e) En déduire que : $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

4) Montrer que : $A\Delta B = A\cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$

Exercice7 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2 \end{array}$ et $A=[2;11]$ et $B=[-1;6]$

Déterminer :

1) L'image directe de A et B par f

2) L'image réciproque de A et B par f

Exercice8 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:]2;+\infty[\to]5;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{5x}{x-2} \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice9 :1) Soit l'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \sqrt{x^2+4|x|} \end{array}$

a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?

2) Soit l'application g : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto \sqrt{x^2+4|x|} \end{array}$

a) g est-elle surjective ? b) g est-elle injective ?

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto(x-y\ ;\ x+2y) \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB