http://www.xriadiat.com **DL1: I** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **La logique**
- ✓ **ENSEMBLES ET APPLICATIONS**

Exercice1 : On considère les assertions suivantes : $P \;;\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right): x\geq 2\sqrt{x}-1$

$Q :\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)\left(\exists x\in\mathbb{R}\right): xy\neq x$

1) Ecrire la négation de P et Q

2) Déterminer la valeur de vérité de P et Q

Solution :1) a) On a : $P \;;\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right): x\geq 2\sqrt{x}-1$

Alors : $\overline{P};\left(\exists x\in\mathbb{R}^+\right): x\prec 2\sqrt{x}-1$

b) On a : $Q \;;\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)\left(\exists x\in\mathbb{R}\right): xy\neq x$

Alors : $\overline{Q} \;;\left(\exists y\in\mathbb{R}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right): xy=x$

2) a) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$; $x\geq 2\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2-2\sqrt{x}+1\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$

Or : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ est une assertion vraie

Et on a : $x\geq 2\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$

Donc : $P \;;\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right): x\geq 2\sqrt{x}-1$ est vraie

b) On va raisonner par contre-exemple : $\overline{Q} \;;\left(\exists y\in\mathbb{R}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right): xy=x$

On a : $\left(\exists 1\in\mathbb{R}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right): x\times 1=x$ donc : $\overline{Q}$ est une assertion vraie

Par suite : Q est une assertion fausse

Exercice2 :1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+ : \sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5 \Leftrightarrow x=1$.

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R} \;: x\neq y \;et\; x\times y\neq 2 \Rightarrow x^2y-xy^2+2x-2y\neq 0$

3) Montrer que : $\forall x\geq 1 \;;\forall y\geq 1: x^2+y^2+xy-x-y-1=0 \Rightarrow x=y=1$.

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \;;\sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin\mathbb{N}$

5) Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

6) Montrer que : $\forall n\geq 2 \;; 9/4^n-3n-1$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $3x|x+1|+x-2=0$

Solution : 1) Soient : $x\in\mathbb{R}^+$ on va raisonner par équivalence

$\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}\right)^2=5^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}\right)^2+2\sqrt{x+8}\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=25$

$\Leftrightarrow x+8+2\sqrt{x+8}\sqrt{x+3}+x+3=25 \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{(x+8)(x+3)}=14 \Leftrightarrow x+\sqrt{(x+8)(x+3)}=7$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+8)(x+3)} = 7-x$ et $x \leq 7 \Leftrightarrow (x+8)(x+3) = (7-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 8x + 24 = 49 - 14x + x^2$

$\Leftrightarrow 25x = 49 - 24 \Leftrightarrow 25x = 25 \Leftrightarrow x = 1$

2) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $x^2y - xy^2 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \ ou \ x \times y = 2$??

Soient : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On a : $x^2y - xy^2 + 2x - 2y = 0$

$\Rightarrow xy(x-y) + 2(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(xy+2) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \quad ou \quad x \times y + 2 = 0$

$\Rightarrow x = y \ ou \ x \times y = -2$

Donc : $x^2y - xy^2 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \ ou \ x \times y = 2$

Donc par contraposition on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$x \neq y \ et \ x \times y \neq 2 \Rightarrow x^2y - xy^2 + 2x - 2y \neq 0$

3) Soient : $x \geq 1 \ et \ y \geq 1$

$x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + xy - (x+y) + y^2 - 1^2 = 0$

$\Rightarrow x(x+y) - (x+y) + (y-1)(y+1) = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-1) + (y-1)(y+1) = 0$

On a : $x \geq 1 \ et \ y \geq 1$ Alors : $x-1 \geq 0 \ et \ y-1 \geq 0$ et $x+y \geq 2 \succ 0$

Donc : $(x+y)(x-1) \geq 0 \ et \ (y-1)(y+1) \geq 0$

Or on sait que :$\left(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2\right): a+b=0 \Rightarrow a=0 \ et \ b=0$

Donc : $(x+y)(x-1) = 0 \ et \ (y-1)(y+1) = 0$ Mais : $x+y \succ 0$ et $y \geq 1$

Donc : $x-1=0 \ et \ y-1=0$

Donc : $x = 1 \ et \ y = 1$

4) On a : $n \in \mathbb{N}^*$ donc $0 \prec n \prec n+1 \Rightarrow 0 \prec \frac{n}{n+1} \prec 1 \Rightarrow \sqrt{0} \prec \sqrt{\frac{n}{n+1}} \prec \sqrt{1} \Rightarrow 0 \prec \sqrt{\frac{n}{n+1}} \prec 1$

Donc : $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{N}$ car un nombre strictement compris entre deux entiers consécutifs :0 et 1 ne peut pas être entier

5) Soients$(x;y;z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 18$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x = y$ et $y = z$ et $z = x$

C'est-à-dire supposant que : $x = y = z$

Comme on a : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 18$ et $x = y = z$ alors : $x(x+x) + x(x+x) + x(x+x) = 18$

Donc : $2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$ contradiction car $x \in \mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Par suite : $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

6) Montrons que : $\forall n \geq 2 : \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 3n - 1 = 9k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons $4^2 - 6 - 1 = 9$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 3n - 1 = 9k$ donc $4^n = 9k + 3n + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 9k'$??

$4^{n+1}-3(n+1)-1=4\times4^{n}-3n-3-1=4\times(9k+3n+1)-3n-4=4\times9k+12n+4-3n-4$

$=4\times9k+9n=9(4k+n)=9k'$ avec $k'=4k+n\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\geq2$; $9/4^{n}-3n-1$

7) $3x|x+1|+x-2=0$

On va Opérer par disjonction de cas :

Si $x\geq-1$ alors $x+1\geq0$ donc : $|x+1|=x+1$

Donc : l'équation devient : $3x(x+1)+x-2=0$ qui Signifie que : $3x^2+4x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=4+2\times3=10\succ0$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$ Mais : $x_1=-1\notin[-1;+\infty[$ donc : $S_1=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

Si $x\leq-1$ alors $x+1\leq0$ donc : $|x+1|=-x-1$

Donc : l'équation devient : $-3x(x+1)+x-2=0$ qui signifie que : $-3x^2-2x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-6=-5\prec0$

Comme $\Delta'\prec0$, l'équation ne possède pas de solutions donc : $S_2=\varnothing$.

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

Exercice3 : 1) Montrer que : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$; $a\times b\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

2) Déduire que : $\forall(a;b;c;d)\in(]0;+\infty[)^4$; $a\times b\times c\times d\leq\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Solution : 1) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$ $a\times b\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Leftrightarrow4a\times b\leq(a+b)^2\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\geq4a\times b$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq0\Leftrightarrow(a-b)^2\geq0$; (vraie)

Donc : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$; $a\times b\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; (vraie)

2) Déduction : Soit : $(a;b;c;d)\in(]0;+\infty[)^4$

On a : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$; $a\times b\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ❶ alors on a aussi : $c\times d\leq\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$ ❷

❶ ⊗ ❷ $\Rightarrow a\times b\times c\times d\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\Rightarrow a\times b\times c\times d\leq((a+b)(c+d))^2\frac{1}{2^4}$

Or : $(a+b)(c+d)\leq\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^2$

Donc : $((a+b)(c+d))^2\frac{1}{2^4}\leq((a+b)+(c+d))^4\frac{1}{2^8}\Rightarrow a\times b\times c\times d\leq\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Exercice4 : (Récurrence) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2\times(2n^2-1)$.

Solution : Notons P(n) La proposition "$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2\times(2n^2-1)$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^3 = (2\times1-1)^3 = 1^3 = 1$ et

$1^2\times(2\times1^2-1) = 1\times(2-1) = 1$

Donc : $1 = 1$. Donc P(0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2\times(2n^2-1)$

3étapes : Nous allons montrer que : P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 = (n+1)^2\times\left(2(n+1)^2-1\right) = (n+1)^2\times(2n^2+4n+1)$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + \left(2(n+1)-1\right)^3$ et on a : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2\times(2n^2-1)$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 = n^2\times(2n^2-1)+\left(2(n+1)-1\right)^3 = 2n^4-n^2+8n^3+12n^2+6n+1 = 2n^4+8n^3+11n^2+6n+1$

On a aussi :

$(n+1)^2\times(2n^2+4n+1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1$

$(n+1)^2\times(2n^2+4n+1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^4+8n^3+11n^2+6n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2\times(2n^2-1)$.

Exercice5 : On considère les ensembles suivants : $E = \{1;2;3;4;5;6;....;20\}$

A et B deux parties de E tel que : $A = \{x\in E \ / \ x = 4k ; k\in\mathbb{N}\}$ et $B = \{x\in E \ / \ x = 3k ; k\in\mathbb{N}\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$; $C_E^{A\cap B}$; $C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^A \cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A \cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A \cup C_E^B$

Solution : 1) $A = \{4;8;12;16;20\}$ et $B = \{3;6;9;12;15;18\}$

2) $C_E^A = \{x\in E \ / \ x\notin A\}$

$C_E^A = \{1;2;3;5;6;7;9;10;11;13;14;15;17;18;19\}$

$C_E^B = \{x\in E \ / \ x\notin B\}$

$C_E^B = \{1;2;4;5;7;8;10;11;13;14;16;17;19;20\}$

$A\cap B = \{12\}$

$A\cup B = \{3;4;6;8;9;12;15;16;18;20\}$

$C_E^{A\cup B}=\{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^{A\cap B}=E-\{12\}=\{1;2;3;4;11;13....;20\}$

$C_E^{A}\cap C_E^{B}=\{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

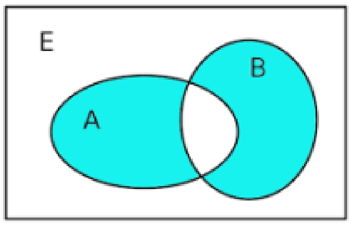
$C_E^{A}\cup C_E^{B}=\{1;2;3;4;11;13....;20\}$

3) On remarque que :

a) $C_E^{A\cup B}=C_E^{A}\cap C_E^{B}$ b) $C_E^{A\cap B}=C_E^{A}\cup C_E^{B}$

Exercice6 : Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. A et B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$A\Delta B==(A\cup B)\setminus(A\cap B)$



1) Montrer que :$A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

2) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.

3) Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :

a) $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$

b) $(A\Delta B)\Delta C=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap B\cap A)$

c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C)=(C\Delta B)\Delta A$

d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C=(C\Delta B)\Delta A$,

e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

4) Montrer que : $A\Delta B=A\cap B\Rightarrow A=B=\emptyset$

Solution : 1) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})=\emptyset\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup\emptyset$

$=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

$=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

2) $A\Delta A=(A\cup A)\setminus(A\cap A)=A\setminus A=\emptyset$

$A\Delta\emptyset=(A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset)=A\setminus\emptyset=A$ et $A\Delta E=(A\cup E)\setminus(A\cap E)=E\setminus A=\overline{A}$

3) a) $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{B\cap\overline{A}}=(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A)$

$=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap A)\cup(B\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$

$=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\emptyset\cup\emptyset\cup(B\cap A)=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$

b) $(A\Delta B)\Delta C=((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))\Delta C=(((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}$

$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap((\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)))$

$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap B\cap A)$

c) $(A\Delta B)\Delta C=(C\cap\overline{A\Delta B})\cup((A\Delta B)\cap\overline{C})=((A\Delta B)\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A\Delta B})=C\Delta(A\Delta B)$

Or $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})=B\Delta A$ donc : $(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(A\Delta B)=C\Delta(B\Delta A)$

d) $(C\Delta B)\Delta A=(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap B\cap C)=A\Delta(B\Delta C)$, en changeant A et C.

e) $(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) Or $C\Delta(B\Delta A)=A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).

Donc $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

4) Montrons que : $A\Delta B=A\cap B\Leftrightarrow A=B=\emptyset$

$\Leftarrow)$) On suppose que : $A=B=\emptyset$

$A\Delta B=\emptyset\Delta\emptyset=\emptyset$ et $A\cap B=\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$

Donc : $A\Delta B = A\cap B$
Donc : $A = B = \varnothing \Rightarrow A\Delta B = A\cap B$
$\Rightarrow$) On suppose que : $A\Delta B = A\cap B$
Montrons que : $A = B = \varnothing$
On suppose que : $A \neq \varnothing$ par exemple
Donc : $\exists x \in A$
Si : $x \in B$ Alors : $x \in A\cap B$
Donc : $x \in A\Delta B$ absurde
Si : $x \notin B$ Alors : $x \in A\Delta B$
Donc : $x \in A\cap B$ absurde
Donc : $A = \varnothing$ (de même on montre que : $B = \varnothing$)
Conclusion : $A\Delta B = A\cap B \Rightarrow A = B = \varnothing$

Exercice7 : Soit l'application $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+2 \end{matrix}$ et $A = [2;11]$ et $B = [-1;6]$

Déterminer :
1) L'image directe de A et B par f
2) L'image réciproque de A et B par f

Solution : 1) a) $x \in A \Leftrightarrow 2 \le x \le 11 \Leftrightarrow 2^2 \le x^2 \le 11^2$

$\Leftrightarrow 2^2+2 \le x^2+2 \le 11^2+2 \Leftrightarrow 6 \le x^2+2 \le 123 \Leftrightarrow 6 \le f(x) \le 123 \Leftrightarrow f(x) \in [6;123]$

Donc : $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in [6;123]$

Ainsi : $f(A) = [6;123]$

b) $B = [-1;6]$ Or : $B = [-1;6] = [-1;0] \cup [0;6]$

$x \in B \Leftrightarrow -1 \le x \le 0 \ \ ou \ \ 0 \le x \le 6 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \ ou \ 0 \le x^2 \le 36$

$\Leftrightarrow 2 \le x^2+2 \le 3 \ ou \ 2 \le x^2+2 \le 38 \Leftrightarrow 2 \le x^2+2 \le 38 \Leftrightarrow f(x) \in [2;38]$

Donc : $x \in B \Leftrightarrow f(x) \in [2;38]$

Ainsi : $f(B) = [2;38]$

2) a) $f^{-1}([2;11]) = ?$

$f^{-1}([2;11]) \Leftrightarrow f(x) \in [2;11]$

$x \in f^{-1}([2;11]) \Leftrightarrow 2 \le x^2+2 \le 11 \quad \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 9 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x^2} \le \sqrt{9}$

$\Leftrightarrow 0 \le |x| \le 3 \quad \Leftrightarrow x \in [-3;3]$

Ainsi : $f^{-1}([2;11]) = [-3;3]$

b) $f^{-1}([-1;6]) = ?$; $f^{-1}([-1;6]) \Leftrightarrow f(x) \in [-1;6]$

$x \in f^{-1}([-1;6]) \Leftrightarrow -1 \le x^2+2 \le 6 \quad \Leftrightarrow -3 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x^2} \le \sqrt{4}$

$\Leftrightarrow 0 \le |x| \le 2 \quad \Leftrightarrow x \in [-2;2]$

Ainsi : $f^{-1}([-1;6]) = [-2;2]$

Exercice8 : Soit l'application : $f :]2;+\infty[\to]5;+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{5x}{x-2}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : 1) $f(x)=\frac{5x}{x-2}$

Soient $x_1 \in]2;+\infty[$ et $x_2 \in]2;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{5x_1}{x_1-2}=\frac{5x_2}{x_2-2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1-2}=\frac{x_2}{x_2-2} \Rightarrow x_1(x_2-2)=x_2(x_1-2)$

$\Rightarrow x_2x_1-2x_1=x_1x_2-2x_2 \Rightarrow -2x_1=-2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

2)Soient $y \in]5;+\infty[$

Résolvons dans $]2;+\infty[$ l'équation : $f(x)=y$

Soit : $x \in]2;+\infty[$

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{5x}{x-2}=y \Leftrightarrow 5x=y(x-2)$ car $x \in]2;+\infty[$ donc $x-2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 5x-xy=-2y \quad \Leftrightarrow x(5-y)=-2y$

$y \in]5;+\infty[$ Donc $5-y \neq 0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{-2y}{5-y}=\frac{2y}{y-5}$

Vérifions que : $x=\frac{2y}{y-5} \in]2;+\infty[$???

$\frac{2y}{y-5}-2=\frac{2y-2y+10}{y-5}=\frac{10}{y-5} \succ 0$ Car $y \in]5;+\infty[$

Donc : $x=\frac{2y}{y-5} \in]2;+\infty[$

Donc $\forall y \in]5;+\infty[\quad \exists x \in]2;+\infty[\,/\, f(x)=y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

3) On a d'après les questions précédentes que l'application f est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application f est bijective.

$\begin{cases} f(x)=y \\ x \in]2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)=\frac{2y}{y-5} \\ y \in]5;+\infty[\end{cases}$ Donc : $\forall x \in]5;+\infty[\; ; \; f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-5}$

$$f^{-1} :]5;+\infty[\to]2;+\infty[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-5}$$

Exercice9 :1) Soit l'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+4|x|} \end{array}$

a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?

2) Soit l'application g : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x^2+4|x|} \end{array}$

a) g est-elle surjective ? b) g est-elle injective ?

Solution :1) a) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+4|x|} \end{array}$ On remarque que f est paire

f n'est pas injective en effet : On a : $f(-1)=\sqrt{(-1)^2+4|-1|}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ et

$f(1)=\sqrt{1^2+4}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Donc : $f(-1)=f(1)$ mais $-1\neq 1$

b) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$ On remarque que : $\sqrt{x^2+4|x|}\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\geq 0$

f n'est pas surjective en effet : $-1\in\mathbb{R}$ et l'équation : $\sqrt{x^2+4|x|}=-1$ n'a pas de solution

2) Soit l'application g : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$

Soit $y\in\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x^2+4|x|}=y\Leftrightarrow x^2+4|x|=y^2\Leftrightarrow x^2+4|x|-y^2=0$

$\sqrt{x^2+4|x|}=y\Leftrightarrow |x|^2+4|x|-y^2=0$

On pose : $|x|=X$: $X^2+4X-y^2=0$ $\Delta=16+4y^2\succ 0$

Donc : 2 solutions : $|x|=\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}$ et $|x|=\frac{-4-\sqrt{16+4y^2}}{2}$

On a : $\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}\geq 0$ car $\sqrt{16+4y^2}\geq\sqrt{16}=4$ Mais : $\frac{-4-\sqrt{16+4y^2}}{2}\prec 0$ Donc :

$|x|=\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}$

Alors : $x=\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}$ ou $x=\frac{4-\sqrt{16+4y^2}}{2}$

Donc : $\forall y\in\mathbb{R}^+\ \exists x\in\mathbb{R}/\ g(x)=y$ Conclusion : g est surjective

b) g n'est pas injective car : L'équation : $\sqrt{x^2+4|x|}=y$ admet deux solutions

On a : $g(-1)=\sqrt{(-1)^2+4|-1|}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ et $g(1)=\sqrt{1^2+4}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Donc : $g(-1)=g(1)$ mais $-1\neq 1$

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto(x-y\ ;\ x+2y)\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit : $(x;y)\ ;\ (x';y')\in\mathbb{R}^2$

Tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y')\Leftrightarrow(x-y\ ;\ x+2y)=(x'-y'\ ;\ x'+2y')$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x-y=x'-y' \\ x+2y=x'+2y'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-x'=y-y' & (1) \\ x-x'=2y'-2y & (2)\end{cases}$

$(1)+(2)\ \Rightarrow y-y'=2y'-2y\Rightarrow 3y=3y'\Rightarrow y=y'$

$x-x'=y-y'\ (1)\ \Rightarrow x-x'=0 \Rightarrow x=x'$

$\Rightarrow x=x'\ et\ \ y=y' \Rightarrow (x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soit : $(z;t)\in\mathbb{R}^2$; $\exists?(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y)=(z;t)$??

$f(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x-y\ ;\ x+2y)=(z;t)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y &=z\\ x+2y &=t\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y &=2z\\ x+2y &=t\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}3x &=2z+t\\ x-y &=z\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}x &=\dfrac{2z+t}{3}\\ y &=x-z=\dfrac{2z+t}{3}-z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x &=\dfrac{2z+t}{3}\in\mathbb{R}\\ y &=\dfrac{t-z}{3}\in\mathbb{R}\end{cases}$$ Donc : f surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$$f(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x;y)=f^{-1}(z;t)=\left(\frac{2z+t}{3};\frac{t-z}{3}\right)$$

Donc : f^{-1} : $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\mapsto\left(\dfrac{2x+y}{3};\dfrac{y-x}{3}\right)\end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien