http://www.xriadiat.com **DL1: H** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **La logique**
- ✓ **ENSEMBLES ET APPLICATIONS**

Exercice1 : 2) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x^2+6x-7$

On considère la proposition suivante : $P \ :(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2): x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y)$

1) Ecrire la négation de P
2) Calculer : $f(1)$ et $f(-7)$
3) En déduire la valeur de vérité de la proposition P
4) Ecrire la contraposé de P et donner sa valeur de vérité
5) Que peut-on dire de la fonction f ?

Solution :1) Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U \ et \ non(V)$"

$\overline{P} \ :(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2): x\neq y \ et \ f(x)=f(y)$

2) $f(1)=1^2+6\times1-7=7-7=0$ et $f(-7)=(-7)^2+6\times(-7)-7=49-42-7=0$

3) On a : $f(1)=0$ et $f(-7)=0$

Donc $:(\exists(1;-7)\in\mathbb{R}^2): 1\neq -7 \ et \ f(1)=f(-7)$

Donc : $\overline{P}$:est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

4) la contraposé de P est : $:(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Puisque : P est une proposition fausse alors la contraposé de P est aussi fausse

5) f n'est pas injective

Exercice2 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \ : \ \frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x-1|\leq 2\Rightarrow |x^2+x-2|\leq 10$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x-2|\leq 1\Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x+2}\right|\leq 3$

4) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0 \Leftrightarrow x=y=0$

5) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \ \sqrt{1+x^2}\neq x$

6) Montrer que : $\forall(a;b)\in([2;+\infty[)^2$: $a\neq b\Rightarrow\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\neq\sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

7) Soient : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que : $a+b\neq 0$: Montrer que : $a\neq -2b\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}\neq 3$

8) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

9) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Solution : 1) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})=1$

$\Rightarrow 1+\left(\sqrt{x}\right)^2=1\Rightarrow 1+x=1\Rightarrow x=0$

2) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\ |x-1|\le 2\Rightarrow |x^2+x-2|\le 10$

Soit : $x\in\mathbb{R}$; Supposons que : $|x-1|\le 2$

Et montrons que : $|x^2+x-2|\le 10$

On a : $x^2+x-2=(x-1)(x+1)+x-1=(x-1)(x+2)$

Par suite : $|x^2+x-2|=|(x-1)(x+2)|=|x-1||x+2|$

Comme : $|x-1|\le 2$ alors : $-2\le x-1\le 2$

Alors : $1\le x+2\le 5$ et donc : $|x+2|\le 5$

or : $|x-1|\le 2$ donc : $|x^2+x-2|=|x-1||x+2|\le 2\times 5$

D'où : $|x^2+x-2|\le 10$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\ |x-1|\le 2\Rightarrow |x^2+x-2|\le 10$

3) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\ |x-2|\le 1\Rightarrow \left|\dfrac{2x+3}{x+2}\right|\le 3$

Soit : $x\in\mathbb{R}$; Supposons que : $|x-2|\le 1$

Et montrons que : $\left|\dfrac{2x+3}{x+2}\right|\le 3$

On a : $|x-2|\le 1\Rightarrow -1\le x-2\le 1$

$\Rightarrow 1\le x\le 3$

$\Rightarrow 5\le 2x+3\le 9$ et $3\le x+2\le 5$

$\Rightarrow 5\le 2x+3\le 9$ et $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{x+2}\le\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5}\times 5\le (2x+3)\times\dfrac{1}{x+2}\le\dfrac{1}{3}\times 9$

$\Rightarrow 1\le\dfrac{2x+3}{x+2}\le 3$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\ |x-2|\le 1\Rightarrow \left|\dfrac{2x+3}{x+2}\right|\le 3$

4) Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication : Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Leftarrow)$ Supposons : $x=y=0$ et Montrons que : $x^2+y^2+xy=0$

On a : $0^2+0^2+0\times 0=0$ Donc : $x^2+y^2+xy=0$

$\Rightarrow)$Supposons : $x^2+y^2+xy=0$ et Montrons que : $x=y=0$

On a : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+xy+xy=xy\\ x^2+y^2+xy-xy=-xy\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2xy=xy\\ x^2+y^2=-xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)^2=xy\\ x^2+y^2=-xy\end{cases}$ Or : $(x+y)^2\ge 0$ et $x^2+y^2\ge 0$

Donc : $xy\ge 0\ \ et\ \ xy\le 0$ par suite : $xy=0$

Donc : $x^2+y^2=0$ Donc : $x^2=-y^2$

Or : $x^2\ge 0$ et puisque $x^2=-y^2$ on a aussi : $x^2\le 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ et comme : $x^2 + y^2 = 0$

Alors : $y^2 = 0$ c'est-à-dire : $y = 0$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 + xy = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$ $x^2 + y^2 + xy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

5) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\exists x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{1+x^2} = x$

$\exists x \in \mathbb{R}^+$; $\sqrt{1+x^2} = x$ $\Rightarrow \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 = x^2$ $\Rightarrow 1 + x^2 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$

Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{1+x^2} \neq x$

6) Soient $(a;b) \in \left([2;+\infty[\right)^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{b^2}} \Rightarrow a = b$

$$\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{b^2}} \Rightarrow \left(\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{4}{b^2}}\right)^2 \Rightarrow 1-\frac{4}{a^2} = 1-\frac{4}{b^2} \Rightarrow -\frac{4}{a^2} = -\frac{4}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} \Rightarrow a^2 = b^2$$

$\Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = b$ Car $(a;b) \in \left([2;+\infty[\right)^2$

Alors : Par contraposition : $\forall (a;b) \in \left([2;+\infty[\right)^2$: $a \neq b \Rightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

7) Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $a + b \neq 0$

Utilisons un Raisonnement par contraposition et montrons que : $\frac{a-b}{a+b} = 3 \Rightarrow a = -2b$?

$$\frac{a-b}{a+b} = 3 \Rightarrow a - b = 3(a+b) \Rightarrow a - b = 3a + 3b \Rightarrow a - 3a = 3b + b \Rightarrow -2a = 4b \Rightarrow a = -2b$$

Alors : Par contraposition : $a \neq -2b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq 3$

8)Soit $n \in \mathbb{N}$: on a 3 cas possibles seulement

Pour n : $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n = 3k$

$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3k'$ Avec $k' = k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n = 3k+1$ $\quad n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$n(n+1)(n+2) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3k'$

Avec $k' = (3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n = 3k+2$

$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3k'$

Avec $k' = (3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

9) Notons P(n) La proposition " $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1(1+1)=2$ et $\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$.

Donc P(1) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$??

On a : $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)=[1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)]+(n+1)(n+2)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Donc $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)=(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2-|x-2|-4=0$ 2) $\sqrt{x^2+1}=2x$

Solution :1) Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

On va Opérer par disjonction de cas :
Si $x\geq2$ alors $x-2\geq0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ c'est-à-dire : $x^2-x-2=0$
Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$: a = 1, b = -1 et c = - 2
Donc Δ = b² – 4ac = (-1)² – 4 x 1 x (-2) = 9.
Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times1}=-1\notin[2;+\infty[$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times1}=2$ Donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec2$ alors $x-2\leq0$ donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$ c'est à dire : $x^2+x-2-4=0$ Signifie : $x^2+x-6=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$: a = 1, b = 1 et c = - 6
Donc :Δ = b² – 4ac = 1² – 4 x 1 x (-6) = 25.
Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=-3$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=2$ Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$ Donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

2) *Methode1 :* $x\in S\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Rightarrow x^2+1=4x^2 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\, ou x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

<u>Remarque :</u> On ne peut pas affirmer que : $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3}\notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x\in S \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2x$ et $x\geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Longleftrightarrow x^2+1=4x^2$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$ et $x\geq 0 \Longleftrightarrow$ ($x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$) et $x\geq 0$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exercice4 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{9n^2+13n+5}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{9n^2+13n+5}=m$

$\sqrt{9n^2+13n+5}=m \Leftrightarrow 9n^2+13n+5=m^2 \Leftrightarrow (3n)^2+2\times 3n\times 2+2^2+n+1=m^2 \Leftrightarrow (3n+2)^2+n+1=m^2$

Donc : $(3n+2)^2<m^2$ et comme : $(3n+3)^2=9n^2+18n+9$

Alors : $(3n+3)^2-m^2=(9n^2+18n+9)-(9n^2+13n+5)=5n+4\succ 0$

On a alors : $(3n+2)^2<m^2<(3n+3)^2$ c'est-à-dire : $3n+2<m<3n+3$

C'est-à-dire : $3n+2<m<(3n+2)+1$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $3n+2$ *et* $3n+3$ Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5}\notin\mathbb{N}$

Exercice5 : $A=[0;1[$: et $B=\left\{\frac{x}{x+1} / x\in\mathbb{R}^+\right\}$

Montrons que : $A=B$

Solution : Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A=B$, on montre que : $A\subset B$ et que $B\subset A$.

a) Montrons que $A\subset B$?

Soit $y\in A \Rightarrow 0\leq y\prec 1$

Montrons que : $y\in B$

C'est-à-dire : Montrons que : $\exists x\in\mathbb{R}^+ / y=\frac{x}{x+1}$

$y=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1)=x \Leftrightarrow xy+y=x \Leftrightarrow x(1-y)=y$

$y=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}\in\mathbb{R}^+$ Car $0\leq y\prec 1$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}^+ / y=\frac{x}{x+1}$

Par suite : $y\in B$ et alors : $A\subset B$

a) Montrons que $B\subset A$?

Soit $y \in B \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ / y = \dfrac{x}{x+1}$

Montrons que : $y \in A$

C'est-à-dire : Montrons que : $0 \leq y \prec 1$?

On a : $x \in \mathbb{R}^+ \ et \ y = \dfrac{x}{x+1}$ donc : $0 \leq y$

$1 - y = 1 - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-x}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} \succ 0$ Car $0 \leq x$

Donc : $y \prec 1$ et alors : $0 \leq y \prec 1$

Donc : $y \in A$

Par suite : $B \subset A$

Conclusion : $A = B$

Exercice6 : Soient A ; B ; C des ensembles

1) Monter que : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

2) Monter que : $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$

Solution :1) On suppose que : $A \subset B \subset C$

On a : $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset B$ et $B \subset C$

$\Rightarrow A \cup B = B$ et $B \cap C = B \Rightarrow A \cup B = B \cap C$

On suppose que : $A \cup B = B \cap C$

On a : $A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \cup B \subset B$ et $A \cup B \subset C$

$\Rightarrow A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset B \subset C$

Donc : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

2) On suppose que : $A - B = A$

Montrons que : $B - A = B$

Donc : Montrons que : $B - A \subset B$ et $B \subset B - A$

C'est-à-dire : montrons que : $B - A \subset B$?

Soit : $x \in B - A$ donc : $x \in B \ et \ x \notin A$

Donc : $x \in B$

D'où : $B - A \subset B$

Montrons que : $B \subset B - A$?

Soit : $x \in B$

Supp : $x \in A$ alors : $x \in A - B$

Mais : $A - B = A$ donc : $x \notin A$ absurde

Donc : $x \in B$ et $x \notin A$

Donc : $x \in B - A$

D'où : $B \subset B - A$

Par suite : $A - B = A \Rightarrow B - A = B$

Inversement : de la même façon on montre que : $B - A = B \Rightarrow A - B = A$ car $A \ et \ B$ jouent des rôles symétriques.

Exercice7 : Soient les applications : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \dfrac{1}{x} \end{array}$; $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 3x + 2 \end{array}$; $\begin{array}{l} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$

1) a) Déterminer : $f(\{3\})$ b) Montrer que $f(]0;2]) \subset \left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

2) Déterminer : $g(]2;3])$

3)Déterminer $h^{-1}([5;+\infty[)$

Solution : 1) a) $f\left(\{3\}\right)=\left\{f(3)\right\}$

On a : $f(3)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ donc : $f\left(\{3\}\right)=\left\{\frac{8}{3}\right\}$

b) $f\left(]0;2]\right)$? $x\in]0;2]\Leftrightarrow 0\prec x\leq 2\Leftrightarrow -2\leq -x\prec 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\leq -\frac{1}{2}$

$x\in]0;2]\Rightarrow x-\frac{1}{x}\leq -\frac{1}{2}+2\Rightarrow x-\frac{1}{x}\leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x)\leq\frac{3}{2}$

Donc : $x\in]0;2] \Rightarrow f(x)\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

Donc : $f\left(]0;2]\right)\subset\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) Déterminons : $g\left(]2;3]\right)$.

$g(x)=x^2-3x+2=x^2-2\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2$

$g(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$x\in]2;3]\Leftrightarrow 2\prec x\leq 3\Leftrightarrow 2-\frac{3}{2}\leq x-\frac{3}{2}\prec 3-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq x-\frac{3}{2}\prec\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\leq\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\prec\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\leq\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\prec\frac{9}{4}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow 0\leq\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\prec 2$

$x\in]2;3]\Leftrightarrow 0\leq g(x)\prec 2\Leftrightarrow g(x)\in[0;2[$

Donc : $g\left(]2;3]\right)=[0;2[$

3) Soit : $x\in\mathbb{R}$; $x\in h^{-1}\left([5;+\infty[\right)\Leftrightarrow h(x)\in[5;+\infty[\Leftrightarrow 5\leq h(x)$

$\Leftrightarrow 5\leq x^2+1\Leftrightarrow 0\leq x^2-4$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in h^{-1}\left([5;+\infty[\right)\Leftrightarrow x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

D'où : $h^{-1}\left([5;+\infty[\right)=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

Exercice8 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\dfrac{x}{1+|x|}\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) f est-elle surjective ?

Solution : Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right|=\left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|$

$\Rightarrow\frac{|x_1|}{1+|x_1|}=\frac{|x_2|}{1+|x_2|}\Rightarrow|x_1|\left(1+|x_2|\right)=|x_2|\left(1+|x_1|\right)$

$\Rightarrow|x_1||x_2|+|x_1|=|x_1||x_2|+|x_2|\Rightarrow|x_1|=|x_2|$

On remplace dans : $\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_1|}\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

2) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: on a : $x\le|x|\prec|x|+1$

Donc : $\frac{x}{1+|x|}\prec\frac{1+|x|}{1+|x|}$ c'est-à-dire : $f(x)\prec 1$:

Par exemple 1 ou 2 n'admet pas d'antécédents
Donc f n'est pas surjective

Exercice9 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x\mapsto\frac{2}{x-1}\end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Solution : Soient $y\in]0;+\infty[$: Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{x-1}=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=\frac{2}{y} \\ x\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{y}+1$$

$(\forall y\in]0;+\infty[)\ (\exists!\ \boldsymbol{x}\in]1;+\infty[)\ (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Donc : f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in]0;+\infty[\end{cases}$$

$\forall y\in]0;+\infty[\ f^{-1}(y)=\frac{2}{y}+1$ Donc : $\begin{array}{l} f^{-1}:]0;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto\frac{2}{x}+1\end{array}$

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ (n;m)\mapsto(n-m)^2\end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

Solution : *Conseils méthodologiques (Pour montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective/surjective)*
Soit f ∈ F(E ,F) :

- *Pour montrer que f est injective : on prend x et x_0,*

deux éléments de E tels que f (x) = f (x_0), et on montre que x = x_0 (ainsi y = f (x) ne peut avoir plus d'un antécédent);

- *Pour montrer que f n'est pas injective :*

On trouve x et x_0 , éléments de E distincts et possédant la même image par f ;

- *Pour montrer que f n'est pas surjective :*

On trouve y ∈ F n'ayant aucun antécédent dans E par f

- *Pour montrer que f est surjective :*

On prend y ∈ F quelconque, et on détermine un antécédent de y dans E par f .

1)

- f est injective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m') \Rightarrow (n;m)=(n';m')$

- f n'est pas injective si et seulement s'il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')$ *et* $(n;m)\neq(n';m')$

Si je trouve : $(n;m)\neq(n';m')$ et $f(n;m)=f(n';m')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)$ *et* $(1;0)$

On a : $f(1;2)=(1-2)^2=1$ et $f(1;0)=(1-0)^2=1$

Donc : : $\exists(1;2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(1;0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(1;2)=f(1;0)$ Mais $(1;2)\neq(1;0)$

Donc : f n'est pas injective

2)

- f est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  Tel que : $f(n;m)=p$

- f n'est pas surjective si et seulement si il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists p\in\mathbb{N}$; $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq p$

- Si je trouve : $p\in\mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on peut affirmer que f n'est pas surjective.

Si je prends : $p=3$

On a : $f(n;m)=3 \Leftrightarrow (n-m)^2=3 \Leftrightarrow n-m=\sqrt{3}$

Mais :il n'existe pas : $(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n-m=\sqrt{3}$

Donc : $\exists 3\in\mathbb{N}$; $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq 3$

Donc : f n'est pas surjective.

Remarque : il existe des éléments de $\mathbb{N}$ qui ont des antécédents dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Par exemple : $p=4$

$f(n;m)=4 \Leftrightarrow (n-m)^2=4 \Leftrightarrow n-m=2\,ou\;n-m=-2$

Il existe : $(3;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $(3-1)^2=4$

C'est-à-dire : $4\in\mathbb{N}$ a au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$(pas suffisant pour affirmer que f est surjective car il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivé aient

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien