 DL1: G PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});3x^2-xy+4y^2\neq 0$ »

2) Q: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=1\Rightarrow x\succ 1$ »

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n}\notin\mathbb{N}$ »

Exercice2 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$; Montrer que : $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice3 : Montrer que :

1) $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq y\ et\ x\times y\neq 1\Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}$

2) Montrer que : $\forall x\geq 1\ ;\forall y\geq 4:\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow x=2\ et\ y=8$.

Exercice4 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $13/2^{4n}-3^n$

Exercice5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $|x-1|+2x-3\geq 0$ 2) $\sqrt{3-x}+x\prec 0$

Exercice6 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble

Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

2) Calculer $A\Delta B$ pour : A = {0, 1, 2, 3} et B = {2, 3, 4}.

3)Monter que : $A\Delta B=(A-(A\cap B))\cup(B-(A\cap B))$

4) Supposons que : $A\Delta B=A\cap B$

Monter que : $A=B=\varnothing$

5) Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

6) Monter que : $\forall C\in P(E)$: $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

7) Résoudre l'équation d'inconnue : $X\in P(E)$; $A\Delta X=\varnothing$

Exercice7 : Soient les ensembles : $E=\{a;b;c;d\}$ et $F=\{1;2\}$

1)Déterminer $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E e

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants : $E\times F$ et F^2 et déterminer : $card(E\times F)$

Exercice8 : Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^3+y^3=1\}$ et $I=[-1;1]$

1) Montrer que : $E\neq\varnothing$ et $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrer que : $E\subset I\times I$ et $E\neq I\times I$

Exercice9 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{2x}{1+|x|}\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;|f(x)|\prec 2$

b) f est-elle surjective ?

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\} \\ x\mapsto f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}\end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice11 : Soit E un ensemble non vide et soient A ; B des parties de E tel que :
$A\cup B=E$ et $A\cap B=\varnothing$

Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E)\to P(A)\times P(B) \\ X\mapsto (A\cap X;B\cap X)\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Exercice12 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+1\end{array}$ et Considérons les ensembles : $A=[-3;2]$ et $B=[0;4]$

1) Comparer les ensembles :
$f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$

2)Quelle condition doit vérifier f pour que : $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Exercice13 : Soient E, F et G trois ensemble et soient : f: $E\to F$ et g: $F\to G$ deux applications.

1) Montrer que si f et g sont injectives alors $g\circ f$ est injective.

2) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g\circ f$ est surjective.

3)Que peut-on conclure sur $g\circ f$ si f et g sont bijectives ?

4) Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f est injective.

5) Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective. 6) Si à présent f : $E\to F$ et g : $F\to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

a) $g\circ f=Id_E$ b) $f\circ g=Id_F$ c) $f\circ f=Id_E$

7) Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective

8) Montrer que si $g\circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien