http://www.xriadiat.com **DL1: G** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **La logique**
- ✓ **ENSEMBLES ET APPLICATIONS**

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});3x^2-xy+4y^2\neq 0$ »

2) Q: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=1\Rightarrow x\succ 1$ »

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n}\notin\mathbb{N}$ »

Solution : 1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});3x^2-xy+4y^2\neq 0$ »

Pour : $x=1\in\mathbb{R}$: $3\times 1^2-1y+4y^2=4y^2-y+3$

$\Delta=(-1)^2-48=-47\prec 0$ donc : $4y^2-y+3=0$ n'a pas solution c'est-à-dire : $4y^2-y+3\neq 0$

Alors P: est vraie

$\overline{P}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});3x^2-xy+4y^2=0$ »

2) Q: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=1\Rightarrow x\succ 1$ »

$\overline{Q}$: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x-y=1\ et\ x\leq 1$ »

Pour : $x=0$ et $y=-1$ on a : $x-y=0-(-1)=1\ \ et\ \ 0\leq 1$

Alors la proposition $\overline{Q}$:est vraie et par suite : Q: Fausse

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n}\notin\mathbb{N}$ »

$\overline{R}$: « $(\exists n\in\mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n}\in\mathbb{N}$ »

Pour : $n=0$: $\sqrt{0^2+2\times 0}=0\in\mathbb{N}$

Alors la proposition $\overline{R}$:est vraie et par suite : R: Fausse

Exercice2 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$; Montrer que : $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$; $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}\Leftrightarrow |x-y|^2\leq\left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\leq 4x^2+4y^2+4xy\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6xy\geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+2xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow (x+y)^2\geq 0$ et on sait que $(x+y)^2\geq 0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice3 : Montrer que :

1) $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq y\ et\ x\times y\neq 1\Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}$

2) Montrer que : $\forall x\geq 1\ ;\forall y\geq 4:\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow x=2\ et\ y=8$.

Solution :1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{y}{y^2+y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x\times y=1$??

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On a : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1}\Rightarrow x\left(y^2+y+1\right)=y\left(x^2+x+1\right)$

$\Rightarrow xy^2+xy+x=yx^2+yx+y\Rightarrow xy^2-yx^2+x-y=0\Rightarrow xy\left(y-x\right)-\left(y-x\right)=0$

$\Rightarrow(y-x)(xy-1)=0\Rightarrow y-x=0\ \ ou\ \ x\times y-1=0\Rightarrow x=y\ \ ou\ \ x\times y=1$

Donc : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x\times y=1$

Donc par contraposition on déduit que : $x\neq y\ et\ x\times y\neq 1\Rightarrow\frac{x}{x^2+x+1}\neq\frac{y}{y^2+y+1}$

2) Soient : $x\geq 1\quad et\quad y\geq 4$

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}=x+y\ \Rightarrow 2\sqrt{x-1}+2\times2\sqrt{y-4}=\sqrt{x-1}^2+\sqrt{y-4}^2+5$

$\Rightarrow\sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1+\sqrt{y-4}^2-2\times2\sqrt{y-4}+2^2=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x-1}-1=0\ et\ \sqrt{y-4}-2=0\ \ \Rightarrow\sqrt{x-1}=1\ et\ \sqrt{y-4}=2$

$\Rightarrow x-1=1\ et\ y-4=4\ \ \Rightarrow x=2\ et\ y=8$

Exercice4 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ 13/2^{4n}-3^n$

Solution : Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad :2^{4n}-3^n$ est un multiple de 13

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $2^{4\times1}-3^1=16-3=13=13\times1$

Alors : $2^{4\times1}-3^1$ est un multiple de 13 donc P (0) est vraie.

2étape : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ 2^{4n}-3^n=13k$

Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\ /\ 2^{4n+4}-3^{n+1}=13k'$??

On a : $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ 2^{4n}-3^n=13k$ donc ; $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ 2^{4n}=13k+3^n$

$2^{4n+4}-3^{n+1}=2^{4n}\times2^4-3^n\times3=\left(13k+3^n\right)\times2^4-3^n\times3=13\times2^4k+3^n\times2^4-3^n\times3$

$2^{4n+4}-3^{n+1}=13\times2^4k+3^n\left(2^4-3\right)=13\times2^4k+3^n\times13$

$2^{4n+4}-3^{n+1}=13\times\left(2^4k+3^n\right)=13\times k'$ avec $k'=2^4k+3^n\in\mathbb{N}$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence : on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ 13/2^{4n}-3^n$

Exercice5: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $|x-1|+2x-3\geq 0$ 2) $\sqrt{3-x}+x\prec 0$

Solution : 1) Soit S l'ensemble des solutions de $(1)\ |x-1|+2x-3\geq0$

Soit $x\in\mathbb{R}$**:** on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Si $x\in[1;+\infty[$ alors $|x-1|=x-1$

Donc l'inéquation (1) devient : $x-1+2x-3\geq0\Leftrightarrow3x-4\geq0$

$3x-4\geq0\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3}$ donc : $S_1=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap[1;+\infty[=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Si $x \in]-\infty;1]$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

Donc l'inéquation (1) devient : $-x+1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Donc : $S_2 = [2;+\infty[\cap]-\infty;1] = \varnothing$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2) Soit S l'ensemble des solutions de (I) : $\sqrt{3-x}+x \prec 0$

On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation

$D_I = \{x \in \mathbb{R} / 3-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} =]-\infty;3]$

$\sqrt{3-x}+x \prec 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} \prec -x$

On va Opérer par disjonction de cas

Soit $x \in]-\infty;3]$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $0 \prec x \leq 3$: Alors : $-3 \leq -x \prec 0$ et puisque $\sqrt{3-x} \geq 0$

Donc : $S_1 = \varnothing$

2iém cas : $x \leq 0$: Alors : $-x \geq 0$

$\sqrt{3-x} \prec -x \Leftrightarrow \sqrt{3-x}^2 \prec (-x)^2 \Leftrightarrow 3-x \prec x^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-3 \succ 0$; $\Delta = 13$; $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Le tableau de signe de l'expression x^2+x-3 est :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		3
$x2-x+3$		$+$	0		$-$		$-0+$		

$S_2 = \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[= \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[$

Exercice6 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble

Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B = (A\cup B)-(A\cap B)$

2) Calculer $A\Delta B$ pour : A = {0, 1, 2, 3} et B = {2, 3, 4}.

3)Monter que : $A\Delta B = (A-(A\cap B))\cup(B-(A\cap B))$

4) Supposons que : $A\Delta B = A\cap B$

Monter que : $A = B = \varnothing$

5) Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$

6) Monter que : $\forall C \in P(E)$: $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$

7) Résoudre l'équation d'inconnue : $X \in P(E)$; $A\Delta X = \varnothing$

Solution : 1) $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

$= [(A\cap\overline{B})\cup B]\cap[(A\cap\overline{B})\cup\overline{A}] = (A\cup B)\cap(B\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})$

$=(A\cup B)\cap E\cap E\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

2) Pour A = {0, 1, 2, 3} et B = {2, 3, 4}, on a A∆B = {0, 1, 4}.

3) Procédons par double-inclusion.

Montrons que : $A\Delta B\subset\left(A-(A\cap B)\right)\cup\left(B-(A\cap B)\right)$

Soit x ∈ A∆B.

Par définition, x ∈ A ∪ B, donc x ∈ A ou x ∈ B.

Supposons d'abord que x ∈ A, l'autre cas étant symétrique. Par définition de la différence symétrique x ∉A ∩ B, on a donc bien x ∈ A \ A ∩ B.

Par symétrie, si x ∈ B, on aura x ∈ B \ A ∩ B. Conclusion : On a montré que pour tout x ∈ A∆B, on a x ∈ A \ A ∩ B ou x ∈ B \ A ∩ B, c'est-à-dire :

A∆B ⊆ (A \ A ∩ B) ∪ (B \ A ∩ B).

Montrons que (A \ A ∩ B) ∪ (B \ A ∩ B) ⊆ A∆B.

La preuve est similaire.

Conclusion : $A\Delta B=\left(A-(A\cap B)\right)\cup\left(B-(A\cap B)\right)$

4) Supposons que : $A\Delta B=A\cap B$

Montrons que : $A=B=\varnothing$

Pour montrer que A = B = ∅, il nous suffit de montrer que :

A = ∅, car A et B jouent des rôles symétriques.

Montrons donc que A = ∅.

Supposons par l'absurde qu'il existe a ∈ A.

Deux cas sont alors possibles :

1er cas : a ∈ B. On a : a ∈ A ∩ B = A∆B.

Or, par définition de la différence symétrique, a ∉A ∩ B, une contradiction.

2nd cas : a ∉B. On a alors que : a ∉ A ∩ B.

Puisque a ∈ A, on a que a ∈ A ∪ B, et donc a ∈ A∆B.

Or, A∆B = A∩B, donc a ∈ A∩B, donc : a ∈ B, une contradiction.

Conclusion : Tous les cas mènent à une contradiction, c'est donc qu'il n'existe pas de a ∈ A, et donc A = ∅

5)Montrons que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=\left(\overline{A}-\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}-\overline{A}\right)=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)=(A-B)\cup(B-A)=A\Delta B$

6) Soit $C\in P(E)$

- Si on a : $B=C$ alors $A\Delta B=A\Delta C$
- Supposons que : $A\Delta B=A\Delta C$ et montrons que $B=C$?

✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in C$?

Si $x\in A$:

$(x\in A$ et $x\in B)\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\notin A\Delta B\Rightarrow x\notin A\Delta C$

(Car $A\Delta B=A\Delta C$)

$\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in C$

Donc : $A\cap B\subset C$ **(1)**

Si $x\notin A$:

$(x\notin A$ et $x\in B)\Rightarrow x\in B-A\Rightarrow x\in A\Delta B\Rightarrow x\in A\Delta C$

(Car $A\Delta B=A\Delta C$)

$\Rightarrow x\in C-A\Rightarrow x\in C$

Donc $\overline{A}\cap B\subset C$ **(2)**

De **(1) et (2)** en déduit que : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\subset C$

Et puisque : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B=E\cap B=B$

Alors $B\subset C$

De même on montre que : $C\subset B$

Donc : $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$

Finalement : $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$

7) Résolvons l'équation d'inconnue : $X \in P(E)$; $A\Delta X = \varnothing$

On a que AΔA = A ∪ A \ A ∩ A = A \ A = ∅,
Donc : A est solution de l'équation. De plus, n'importe quelle partie X de E satisfaisant AΔX = ∅ satisferait
AΔX = AΔA. Or, par la question précédente, on a dans ce cas X = A.
Conclusion : La seule solution de l'équation est la partie A.

Exercice7 : Soient les ensembles : $E = \{a;b;c;d\}$ et $F = \{1;2\}$

1)Déterminer $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E e

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants : $E\times F$ et F^2 et déterminer : $card(E\times F)$

Solution : $P(E) = \{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{d\};\{a;b\};\{a;c\};\{a;d\};\{b;c\};\{b;d\};\{c;d\};\{a;b;c\};\{a;b;d\};$
$;\{b;c;d\};\{a;c;d\};E\}$

2) $E\times F = \{(a;1);(a;2);(b;1);(b;2);(c;1);(c;2);(d;1);(d;2)\}$

$F^2 = F\times F = \{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$

$card(E\times F) = card(E)\times card(F) = 4\times 2 = 8$

Exercice8 : Soient les ensembles : $E = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$

$F = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^3+y^3=1\}$ et $I = [-1;1]$

1) Montrer que : $E\neq\varnothing$ et $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $E\cap F = \{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrer que : $E\subset I\times I$ et $E\neq I\times I$

Solution : 1) On a : $(0;1)\in E$ car : $0^2+1^2=1$ donc : $E\neq\varnothing$

On a : $(0;1)\in F$ car : $0^3+1^3=1$ donc : $F\neq\varnothing$

2) Montrons par double inclusion que : $E\cap F = \{(1;0);(0;1)\}$

a) Montrons que : $(x;y)\in\{(1;0);(0;1)\}$?

Soit : $(x;y)\in E\cap F$

Donc : $(x;y)\in E$ *et* $(x;y)\in F$

Donc : $x^2+y^2=1$ et $x^3+y^3=1$

Donc : $x^2+y^2 = x^3+y^3$

Donc : $x^2+y^2-x^3-y^3=0$

Donc : $x^2(1-x)+y^2(1-y)=0$

Et comme : $x^2\leq x^2+y^2=1$ et $y^2\leq x^2+y^2=1$

Alors : $x^2\leq 1$ et $y^2\leq 1$

Alors : $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$

Alors : $0\leq 1-x$ et $0\leq 1-y$

Donc : $\underbrace{x^2(1-x)}_{\geq 0}+\underbrace{y^2(1-y)}_{\geq 0}=0$

Donc : $x^2(1-x)=0$ et $y^2(1-y)=0$

Donc : $(x=0 \text{ ou } x=1)$ et $(y=0 \text{ ou } y=1)$

Donc : $(x=0\ et\ \ y=0)$ ou $(x=0\ et\ \ y=1)$ ou $(x=1\ et\ \ y=0)$ ou $(x=1 et\ \ y=1)$

Donc : $(x;y)=(0;0)$ ou $(x;y)=(0;1)$ ou $(x;y)=(1;0)$ ou $(x;y)=(1;1)$

Mais : $(x;y)\in E\cap F$ donc : $(x;y)=(0;0)$

$(0;0)\notin E$ Car : $0^2+0^2\neq 1$

$(1;1)\notin E$ Car : $1^2+1^2\neq 1$

Donc : $(x;y)\in\{(1;0);(0;1)\}$.

a) Montrons que : $\{(1;0);(0;1)\}\subset E\cap F$?

On a : $(0;1)\in E$ et $(0;1)\in F$

Car : $0^2+1^2=1$ Et $0^3+1^3=1$

Et on a : $(1;0)\in E$ et $(1;0)\in F$

Car : $0^2+1^2=1$ Et $0^3+1^3=1$

Donc : $\{(1;0);(0;1)\}\subset E\cap F$

Par suite : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrons que : $E\subset I\times I$ avec : $I=[-1;1]$

Soit : $(x;y)\in E$

Donc : $x^2+y^2=1$ et comme : $x^2\leq x^2+y^2=1$ et $y^2\leq x^2+y^2=1$

Alors : $x^2\leq 1$ et $y^2\leq 1$

Alors : $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$

Alors : $-1\leq x\leq 1$ et $-1\leq y\leq 1$

Donc : $x\in I$ et $y\in I$ c'est-à-dire : $(x;y)\in I\times I$

Par suite : $E\subset I\times I$

b) Comme : $(1;1)\in I\times I$ et $(1;1)\notin E$ $(1^2+1^2\neq 1)$

Alors : $I\times I\not\subset E$ Par suite : $E\neq I\times I$

Exercice9 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{2x}{1+|x|}\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|f(x)|\prec 2$

b) f est-elle surjective ?

Solution :1) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right|=\left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{|x_1|}{1+|x_1|}=\frac{|x_2|}{1+|x_2|}\Rightarrow|x_1|(1+|x_2|)=|x_2|(1+|x_1|)$$

$$\Rightarrow|x_1||x_2|+|x_1|=|x_1||x_2|+|x_2|\Rightarrow|x_1|=|x_2|$$

On remplace dans : $\dfrac{2x_1}{1+|x_1|}=\dfrac{2x_2}{1+|x_2|}$

$\Rightarrow \frac{2x_1}{1+|x_1|} = \frac{2x_2}{1+|x_1|} \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc f est injective

2) a) $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: on a : $x \leq |x| \prec |x|+1$

Donc : $2x \leq 2|x| \prec 2(|x|+1)$

Donc : $\frac{2x}{1+|x|} \prec \frac{2(1+|x|)}{1+|x|}$

Donc : $\frac{2x}{1+|x|} \prec 2$ c'est-à-dire : $f(x) \prec 2$:

b) Par exemple : 2 n'admet pas d'antécédents

Donc f n'est pas surjective

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{aligned} &: \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{1\} \\ &x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-2} \end{aligned}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y \in \mathbb{R}-\{1\}$

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation $f(x) = y$

Soit : $x \in \mathbb{R}-\{2\}$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = y \Leftrightarrow x+1 = y(x-2)$

$x-2 \neq 0$ car $x \in \mathbb{R}-\{2\}$

$f(x) = y \Leftrightarrow x+1 = yx-2y \Leftrightarrow x - yx = -2y-1$

$\Leftrightarrow x(1-y) = -2y-1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-2y-1}{1-y}}$ car $y-1 \neq 0$

Et on a : $x = \frac{-2y-1}{1-y} \neq 2$

En effet : si $\frac{-2y-1}{1-y} = 2 \Rightarrow -2y-1 = 2-2y$

$\Rightarrow -1 = 2$ (Absurde)

Donc : $\forall y \in \mathbb{R}-\{1\}\ \exists! x \in \mathbb{R}-\{2\}$ tel que : $f(x) = y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in \mathbb{R}-\{2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \frac{-2y-1}{1-y} \\ y \in \mathbb{R}-\{1\} \end{cases}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$; $f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{1-x} = \frac{2x+1}{x-1}$

$$\begin{aligned} f^{-1} &: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{2\} \\ &x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1} \end{aligned}$$

Exercice11 : Soit E un ensemble non vide et soient A ; B des parties de E tel que : $A\cup B=E$ et $A\cap B=\varnothing$

Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E)\to P(A)\times P(B) \\ X\mapsto (A\cap X;B\cap X)\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit $(X;Y)\in(P(E))^2$

Tel que : $f(X)=f(Y)$ Montrons que : $X=Y$

$f(X)=f(Y)\Rightarrow(A\cap X;B\cap X)=(A\cap Y;B\cap Y)$

$\Rightarrow\begin{cases}A\cap X=A\cap Y & ①\\ B\cap X=B\cap Y & ②\end{cases}\Rightarrow ①\cup② (A\cap X)\cup(B\cap X)=(A\cap Y)\cup(B\cap Y)$

$\Rightarrow X\cap(A\cup B)=Y\cap(A\cup B)$ $\Rightarrow X\cap E=Y\cap E\Rightarrow X=Y$

Donc : f est injective

2) Soit $(Y;Z)\in P(A)\times P(B)$

$\exists ?X\in P(E)$ Tel que : $f(X)=(Y;Z)$

$f(X)=(Y;Z)\Rightarrow(A\cap X;B\cap X)=(Y;Z)$

$\Rightarrow\begin{cases}A\cap X=Y & ①\\ B\cap X=Z & ②\end{cases}\Rightarrow ①\cup② (A\cap X)\cup(B\cap X)=Y\cup Z \quad \Rightarrow X\cap(A\cup B)=Y\cup Z$

$\Rightarrow X\cap E=Y\cup Z \quad \Rightarrow X=Y\cup Z$

On vérifie bien que : $X=Y\cup Z$ est solution de l'équation : $f(X)=(Y;Z)$

En effet : $Y\cup Z\in P(E)$ et $f(Y\cup Z)=(A\cap(Y\cup Z);B\cap(Y\cup Z))$

$=((A\cap Y)\cup(A\cap Z);(B\cap Y)\cup(B\cap Z))=(Y;Z)$ Or : $(Y;Z)\in P(A)\times P(B)$ et $A\cap B=\varnothing$

Donc : $Y\subset A$ *et* $Z\subset B$ et $A\cap B=\varnothing$

Donc : $A\cap Y=Y$ et $A\cap Z=\varnothing$ et $b\cap Y=\varnothing$ et $B\cap Z=Z$

Donc : $f(Y\cup Z)=(Y\cup\varnothing;\varnothing\cup Z)=(Y;Z)$

Conclusion : f est surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$f(Y\cup Z)=(Y;Z)\Leftrightarrow Y\cup Z=f^{-1}(Y;Z)$ et : f^{-1} : $\begin{array}{l} P(A)\times P(B)\to P(E) \\ (Y;Z)\mapsto Y\cup Z\end{array}$

Exercice12 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+1\end{array}$ et Considérons les ensembles : $A=[-3;2]$ et $B=[0;4]$

1) Comparer les ensembles :
$f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$

2)Quelle condition doit vérifier f pour que : $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Solution : 1) On a d'un côté : $A\cap B=[-3;2]\cap[0;4]=[0;2]$

Alors : $f(A\cap B)=f([0;2])=\{f(x)/0\le x\le 2\}=[1;5]$

D'un autre côté, on a : $A=[-3;2]=[-3;0]\cup[0;2]$

$f(A)=f([-3;2])=f([-3;0]\cup[0;2])$

Alors : $f(A)=[1;10]\cup[1;5]=[1;10]$ et $f(B)=[0;4]=[1;17]$

Il est clair que : $f(A)\cap f(B)=[1;10]\cap[1;17]=[1;10]$

Donc : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

A quelle condition on a : $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$?

$y\in f(A)\cap f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\ et\ y\in f(B)$

$\Rightarrow \exists x\in A / y=f(x)\ et\ \exists x'\in B / y=f(x')$

Si : f est injective, alors $x=x'$ et par suite on a :

$\Rightarrow \exists x\in A / y=f(x)\ et\ \exists x\in B / y=f(x)$

$\Rightarrow \exists x\in A\cap B / y=f(x)\ \Rightarrow y\in f(A\cap B)$

Conclusion : Si f est injective alors : $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Exercice13 : Soient E, F et G trois ensemble et soient : f: $E\to F$ et g: $F\to G$ deux applications.
1) Montrer que si f et g sont injectives alors $g\circ f$ est injective.
2) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g\circ f$ est surjective.
3)Que peut-on conclure sur $g\circ f$ si f et g sont bijectives ?
4) Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f est injective.
5) Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective. 6) Si à présent $f : E\to F$ et $g : F\to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
a) $g\circ f = Id_E$ b) $f\circ g = Id_F$ c) $f\circ f = Id_E$
7) Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective
8) Montrer que si $g\circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective

Solution : 1) $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ Car g est injective
$(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car f est injective.
Donc $g\circ f$ est injective.
2)Première méthode : Pour tout $z\in G$ il existe $y\in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.
Comme pour tout $y\in F$ il existe $x\in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
On en déduit que pour tout $z\in G$ il existe $x\in E$ tel que :
$z = g(f(x)) = g\circ f(x)$ autrement dit $g\circ f$ est surjective.
<u>Remarque :</u> a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.
b) Si on commence par écrire « pour tout $y\in F$ il existe $x\in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z\in G$ il existe $y\in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z\in G$ il existe $x\in E$ tel que :
$z = g(f(x)) = g\circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.
Deuxième méthode : On rappelle que $\varphi:U\to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$,
Par conséquent $g\circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = G$ et on en déduit que $g\circ f$ est surjective.
3)Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives
et $g\circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g\circ f$ est surjective
On en déduit que $g\circ f$ est bijective.
4) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car $g\circ f$ est injective
Par conséquent f est injective.
5) <u>*Première méthode :*</u> Pour tout $z\in G$, il existe $x\in E$ tel que :$z = g\circ f(x) = g(f(x))$,
Donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$

Ce qui signifie que g est surjective.

Deuxième méthode : Comme $g \circ f$ est surjective,

$g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g(f(E)) = G$ or $f(E) \subset F$

Donc : $g(f(E)) \subset g(F)$

Comme $g(F) \subset G$, cela donne $G = g(f(E)) \subset g(F) \subset G$ D'où $g(f(E)) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$

Ce qui montre que g est surjective.

6) a) $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)

$g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque : $g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que :$g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b) $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)

$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.

$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c) $f \circ f = Id_E$ est bijective $f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective. $f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$

7) Supposons que : $g \circ f$ est surjective et g est injective

Montrons que f est surjective

Soit : $y \in F$ donc : $g(y) \in G$

Puisque : $g \circ f$ est surjective Il existe $x \in E$ tel que : $(g \circ f)(x) = g(y)$

Donc : $g(f(x)) = g(y)$ et Comme g est injective

Alors : il existe $x \in E$; tel que : $y = f(x)$

Donc : f est surjective

8) Supposons que : $g \circ f$ est injective et f est surjective Montrons que g est injective.

Soit : $y \in F$ et $y' \in F$ tel que : $g(y) = g(y')$

Puisque : f est surjective Il existe x ; $x' \in E$ tel que : $f(x) = y$ et $f(x') = y'$

Donc : $g(f(x)) = g(f(x'))$

Donc : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

Puisque : $g \circ f$ est injective alors : $x = x'$

Donc : $f(x) = f(x')$ c'est-à-dire :$y = y'$

Donc : g est injective.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien