http://www.xriadiat.com **DL1: F** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **La logique**
- ✓ **ENSEMBLES ET APPLICATIONS**

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère les assertions suivantes : P $:\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

1) Ecrire la négation de P

2) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x^2+2x+2$

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(-x-2)=f(x)$

3) Est ce que : P est vraie ? justifier votre réponse

4) Que peut-on dire de la fonction f ?

Exercice2 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+ \quad et \quad y\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x+y=1$

1)Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2\geq 2ab$

2) a) Montrer que : $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}=\dfrac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

b) Montrer que : $1-xy\geq\dfrac{3}{4}$

c) Montrer que : $\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\dfrac{4}{9}$

3)Déduire que :si $x\in\mathbb{R}^+ \quad et \quad y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}\geq\dfrac{1}{3}$

Exercice3 : 1) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): |a+b|\leq|a|+|b|$

2)Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)(\forall y\in[1;+\infty[): \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leq\sqrt{xy}$

Exercice4 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+ \quad et \quad y\in\mathbb{R}^+$

Montrer que : $x\neq y \; et \; xy\neq 4 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\neq\dfrac{\sqrt{y}}{y+2}$

Exercice5 : Montrer par l'absurde que :

1) $\forall x\in\mathbb{R}: \cos x\times\sin x\neq 1$

2) $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{4n+2026}\notin\mathbb{N}$

Exercice6 :

1) Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\,;\,\forall a\in\mathbb{R}_+^*;\,(1+a)^n\geq 1+na$ (Inégalité de Bernoulli).

2) En déduire que : a)$\forall n\in\mathbb{N}\,;\;2^n\geq 1+n$ b)$\forall n\in\mathbb{N}\,;\;3^n\succ n$ c)$\forall n\in\mathbb{N}^*\,;\;(1+n)^n\geq 2n^n$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $x^2-|x-2|+5=0$ 2) $\sqrt{x^2+1}\succ 2x$

Exercice8 : Soient les ensembles : $H=\left\{y\in\mathbb{R}\,/\,y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$; $G=\left\{y\in\mathbb{R}\,/\,y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $H=\left]0;1\right]$

a) Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que : $y_0\in\left]0;1\right]$

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que : $y_0\in H$.

2)Monter que $G\subset H$

3) Est-ce que $G=H$?

Exercice9 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble non vide E

1)Montrer que : $A\subset B\Leftrightarrow \overline{A}\cup B=E$

2)Montrer que : $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}$

3)Monter que : $\begin{cases}\left(\overline{B-C}\right)\cup A=E\\ \left(\overline{C-D}\right)\cup A=E\end{cases}\Rightarrow\left(B-D\right)\subset A$

Exercice10 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$E=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\left|x+1\right|\le 3\right\}$ et $F=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\left|2x-a\right|\le 4\right\}$

1) Ecrire E en extension

2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E\cap F=\varnothing$

3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap F=\varnothing$

4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F\subset\mathbb{N}$

Exercice11 : L'ensemble A^2 contient 9 éléments dont deux éléments sont $\left(x;y\right)$ et $\left(x;z\right)$ quels sont les autres éléments de A^2 ?

2) Existe-t-il une ensemble A tel que $card\left(A^2\right)=7$?

Exercice12 : Soit l'application f : $\begin{aligned}&:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto x^2+3x+\frac{9}{4}\end{aligned}$

1) a) Calculer : $f\left(0\right)$ et $f\left(-3\right)$ et $f^{-1}\left(\left\{-1\right\}\right)$

b) f est-elle injective ? justifier

c) f est-elle surjective ? justifier

d) f est-elle bijective ? justifier

2) Déterminer les intervalles I et J pour que : l'application f : $\begin{aligned}&:I\to J\\ &x\mapsto f(x)\end{aligned}$ soit bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice13 : Soit l'ensemble : $D=\left\{\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^2\,/\,y-x+1\ge 0\right\}$

Et soit l'application f : $\begin{aligned}&\left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R}\to D\\ &\left(x;y\right)\mapsto\left(2x+y\ ;x^2+y\right)\end{aligned}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est Surjective

3) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien