http://www.xriadiat.com **DL1: F** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : On considère les assertions suivantes : $P\ :\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right):f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

1) Ecrire la négation de P

2) Soit f : $\mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}$ tel que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right):f(x)=x^2+2x+2$

Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right):f(-x-2)=f(x)$

3) Est ce que : P est vraie ? justifier votre réponse

4) Que peut-on dire de la fonction f ?

Solution :1) a) $P\ :\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right):f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U\ et\ non(V)$"

Alors : $\overline{P}:\left(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)/\ f(x)=f(y)\ et\ x\neq y$

2) Montrons que : Soit : $x\in\mathbb{R}$; $f(-x-2)=(-x-2)^2+2(-x-2)+2$

$f(-x-2)=x^2+4x+4-2x-4+2=x^2+2x+2$

Donc : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right):f(-x-2)=f(x)$

3) on a $-x-2\neq x$ mais $f(-x-2)=f(x)$

Par exemple : x=1 alors $-1-2\neq 1$ c'est-à-dire : $-3\neq 1$mais : $f(-3)=f(1)$

Donc : $\left(\exists(1;-3)\in\mathbb{R}^2\right)/\ f(1)=f(-3)\ et\ 1\neq -3$

C'est-à-dire : $\overline{P}$ est une assertion vraie par suite : P est une assertion fausse

4) la fonction f n'est pas injective

Exercice2 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x+y=1$

1)Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2\geq 2ab$

2) a) Montrer que : $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}=\dfrac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

b) Montrer que : $1-xy\geq\dfrac{3}{4}$

c) Montrer que : $\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\dfrac{4}{9}$

3)Déduire que :si $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}\geq\dfrac{1}{3}$

Solution : Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2\geq 2ab$ est aussi une Proposition vraie

2) a) Montrons que : $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

Soient : $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$

$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{x^2(y+1)+y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2y+x^2+y^2x+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2y+y^2x+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}$

$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}$

Comme : $x+y=1\Rightarrow(x+y)^2=1\Rightarrow x^2+y^2+2xy=1\Rightarrow x^2+y^2=1-2xy$

$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy\times1+1-2xy}{(x+1)(y+1)}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

b) Montrons que : $1-xy\geq\frac{3}{4}$

On a : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2\geq2ab$ donc : $x^2+y^2\geq2xy$ et $x^2+y^2=1-2xy$

Alors : $1-2xy\geq2xy\Rightarrow1\geq4xy\Rightarrow xy\leq\frac{1}{4}\Rightarrow-xy\geq-\frac{1}{4}\Rightarrow1-xy\geq1-\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{1-xy\geq\frac{3}{4}}$

c) Montrons que : $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

Comme : $x+y=1\Rightarrow x+1+y+1=1+1+1\Rightarrow(x+1)+(y+1)=3$

$\Rightarrow\left[(x+1)+(y+1)\right]^2=9\Rightarrow(x+1)^2+(y+1)^2+2(x+1)(y+1)=9$

$\Rightarrow(x+1)^2+(y+1)^2=9-2(x+1)(y+1)\Rightarrow9-2(x+1)(y+1)\geq2(x+1)(y+1)$

$\Rightarrow9\geq4(x+1)(y+1)\Rightarrow(x+1)(y+1)\leq\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

3)Déduisons que :si $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

On a : $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}=(1-xy)\frac{1}{(x+1)(y+1)}$

$1-xy\geq\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}\Rightarrow(1-xy)\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

Exercice3 : 1) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):|a+b|\leq|a|+|b|$

2)Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)(\forall y\in[1;+\infty[):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leq\sqrt{xy}$

Solution : 1) Montrons que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):|a+b|\leq|a|+|b|$ (l'inégalité triangulaire)

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$|a+b|\leq|a|+|b|\Leftrightarrow|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2\Leftrightarrow(a+b)^2\leq|a|^2+|b|^2+2|a|\times|b|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\leq a^2+b^2+2|a|\times|b|$ car $|X|^2=X^2$

$\Leftrightarrow2ab\leq2|a|\times|b|\Leftrightarrow ab\leq|ab|$ Comme $ab\leq|ab|$ est une proposition vraie : $X\leq|X|$

Alors $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):|a+b|\leq|a|+|b|$ est aussi vraie

2)Soit : $(x;y)\in([1;+\infty[)^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leq\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2\leq\sqrt{xy}^2$

$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1\leq xy\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{xy-x-y+1}+y-1\leq xy$

$\Leftrightarrow 0\leq xy-x-y+1-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{xy-x-y+1}^2-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leq\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy-x-y+1}-1\right)^2\geq 0$ est une proposition vraie

Donc : $(\forall x\in[1;+\infty[)(\forall y\in[1;+\infty[):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leq\sqrt{xy}$

Exercice4 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$

Montrer que : $x\neq y\ et\ xy\neq 4\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{x+2}\neq\frac{\sqrt{y}}{y+2}$

Solution : Par contraposition montrons que : $\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{\sqrt{y}}{y+2}\Rightarrow x=y\ ou\ xy=4$

Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$

$\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{\sqrt{y}}{y+2}\Rightarrow(y+2)\sqrt{x}=(x+2)\sqrt{y}\Rightarrow y\sqrt{x}+2\sqrt{x}=x\sqrt{y}+2\sqrt{y}$

$\Rightarrow y\sqrt{x}-x\sqrt{y}+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0\Rightarrow\sqrt{xy}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)-2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0\Rightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}-2\right)=0$

$\Rightarrow\sqrt{y}-\sqrt{x}=0\ ou\ \sqrt{xy}-2=0\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{x}\ ou\ \sqrt{xy}=2\Rightarrow y=x\ ou\ xy=4$

Donc : $\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{\sqrt{y}}{y+2}\Rightarrow x=y\ ou\ xy=4$

Par contraposition on déduit que : $x\neq y\ et\ xy\neq 4\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{x+2}\neq\frac{\sqrt{y}}{y+2}$

Exercice5 : Montrer par l'absurde que :

1) $\forall x\in\mathbb{R}:\cos x\times\sin x\neq 1$

2) $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{4n+2026}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) Par l'absurde, supposons que : $\exists x\in\mathbb{R}:\cos x\times\sin x=1$

$\cos x\times\sin x=1\Rightarrow\cos x\times\sin x=\cos^2x+\sin^2x\Rightarrow\cos x\times\sin x-2\cos x\times\sin x=\cos^2x+\sin^2x-2\cos x\times\sin x$

$\Rightarrow-\cos x\times\sin x=(\cos x-\sin x)^2\Rightarrow-1=(\cos x-\sin x)^2$

C'est une contradiction car le carré est toujours positif

Ceci signifie : $\forall x\in\mathbb{R}:\cos x\times\sin x\neq 1$

2)Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n+2026}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n+2026}=m$

$\sqrt{4n+2026}=m\Leftrightarrow 4n+2026=m^2\Rightarrow 2(2n+1013)=m^2\Rightarrow m^2=2k$ avec $k=2n+1013\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow m^2$ est pair $\Rightarrow m$ est pair $\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $m=2k'$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $2(2n+1013)=(2k')^2$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $2n+1013=2k'^2$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $1013=2k'^2-2n$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $1013=2\left(k'^2-2\right)\Rightarrow 1013$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 1013 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{4n+2026}\notin\mathbb{N}$

Exercice6 : 1) Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\forall a\in\mathbb{R}_{+}^{*}$; $(1+a)^{n}\geq 1+na$ (Inégalité de Bernoulli).

2) En déduire que : a) $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^{n}\geq 1+n$ b) $\forall n\in\mathbb{N}$; $3^{n}\succ n$ c) $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $(1+n)^{n}\geq 2n^{n}$

Solution : 1) Notons P(n) La proposition suivante : $\forall n\in\mathbb{N};\forall a\in\mathbb{R}_{+}^{*};(1+a)^{n}\geq 1+na$

Soit : $a\in\mathbb{R}_{+}^{*}$; Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $(1+a)^{0}\geq 1+0\times a$ donc $1\geq 1$.

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $(1+a)^{n}\geq 1+na$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)a$??

On a : $(1+a)^{n}\geq 1+na$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $(1+a)^{n}(1+a)\geq(1+na)(1+a)$

Donc : $(1+a)^{n+1}\geq 1+a+na+na^{2}$ c'est-à-dire : $(1+a)^{n+1}\geq\left(1+(1+n)a\right)+na^{2}$

Donc : $(1+a)^{n+1}\geq\left(1+(1+n)a\right)$ car $\left(1+(1+n)a\right)+na^{2}\geq 1+(1+n)a$ (On pourra faire la différence)

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N};\forall a\in\mathbb{R}_{+}^{*};(1+a)^{n}\geq 1+na$.

2) On a : $\forall n\in\mathbb{N};\forall a\in\mathbb{R}_{+}^{*};(1+a)^{n}\geq 1+na$

a) On prend : $a=1$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $(1+1)^{n}\geq 1+n\times 1$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^{n}\geq 1+n$

b) On prend : $a=2$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $(1+2)^{n}\geq 1+n\times 2$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$; $3^{n}\geq 1+2n$

et comme $1+2n\succ n$ alors : $\forall n\in\mathbb{N}$; $3^{n}\succ n$

b) On prend : $a=\frac{1}{n}$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\geq 1+n\times\frac{1}{n}$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\geq 2$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $\frac{(n+1)^{n}}{n^{n}}\geq 2$ par suite : $(n+1)^{n}\geq 2n^{n}$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $x^{2}-|x-2|+5=0$ 2) $\sqrt{x^{2}+1}\succ 2x$

Solution : 1) Soit S l'ensemble des solutions de (1) $x^{2}-|x-2|+5=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$**:** étudions le signe de : $x-2$

<u>Premier cas :</u> si $x\in[2;+\infty[$ alors $|x-2|=x-2$

Donc l'équation (1) devient : $x^{2}-(x-2)+5=0\Leftrightarrow x^{2}-x+7=0$

$\Delta=1-28=-27\prec 0$ Donc : $S_{1}=\varnothing$

<u>Deuxième cas :</u> si $x\in]-\infty;2[$ alors $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc l'équation (1) devient : $x^{2}+(x-2)+5=0\Leftrightarrow x^{2}+x+3=0$; $\Delta=1-12=-11\prec 0$

Donc : $S_{2}=\varnothing$ Finalement : $S=S_{1}\cup S_{2}=\varnothing$

2)On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : $\sqrt{x^{2}+1}\succ 2x$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}/x^{2}+1\geq 0\right\}=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_{1}) :

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \succ 2x$

1ieme cas : si $2x \le 0 \Leftrightarrow x \le 0$ c'est-à-dire : $x \in]-\infty;0]$

Alors : $S_1 =]-\infty;0]$ car l'inéquation est toujours vérifiée ($\sqrt{x^2+1} \ge 0$ et $2x \le 0$)

2ieme cas : si $x \in]0;+\infty[$ alors $2x \succ 0$

$\sqrt{x^2+1} \succ 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \succ (2x)^2 \Leftrightarrow x^2+1 \succ 4x^2 \Leftrightarrow 1-3x^2 \succ 0 \Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ Donc : $S_2 = \left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty;0] \cup \left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[= \left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

Exercice8 : Soient les ensembles : $H = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$;

$G = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$

1) Montrer que : $H =]0;1]$

a) Considérer un élément $y_0 \in H$ et montrer que : $y_0 \in]0;1]$

b) Considérer un élément $y_0 \in]0,1]$ et montrer que : $y_0 \in H$.

2)Monter que $G \subset H$

3) Est-ce que $G = H$?

Solution : 1)a) soit un élément $y_0 \in H$ montrons que $y_0 \in]0,1]$?

$y_0 \in H \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$

On a $x_0^{\,2} \ge 0 \Rightarrow x_0^{\,2}+1 \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1} \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}} \le 1 \Rightarrow y_0 \in]0,1]$ Donc : $H \subset]0;1]$ **(1)**

b) Considérer un élément $y_0 \in]0,1]$ et montrons que $y_0 \in H$?

$y_0 \in]0;1]$ $\quad \exists ? x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$

$y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}} \Leftrightarrow y_0^{\,2} = \frac{1}{x_0^{\,2}+1} \Leftrightarrow x_0^{\,2} = \frac{1}{y_0^{\,2}} - 1$

Or : $y_0 \in]0;1]$ donc $0 \prec y_0 \le 1$ donc : $\frac{1}{y_0^{\,2}} - 1 \ge 0$

Donc : il suffit de prendre : $x_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0^{\,2}} - 1}$ Donc : $y_0 \in H$

Donc : $]0;1] \subset H$ **(2)**

De : (1) et (2) en déduit que **:** $H =]0;1]$

2) Montrons que $G \subset H$?

Montrons que : $G \subset]0;1]$?

Soit un élément $y_0 \in G$ montrons que $y_0 \in]0,1]$?

$y_0 \in G \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$

On a $x_0{}^2 \geq 0 \Rightarrow x_0{}^2+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0{}^2+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0{}^2+1}+1 \geq 2 \Rightarrow 0 \prec \frac{1}{1+\sqrt{x_0{}^2+1}} \leq \frac{1}{2} \leq 1$

Donc : $y_0 \in]0,1]$ Donc : $G \subset H$

3)supposons : $G = H$

On a $1 \in H \Rightarrow 1 \in G \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1 = \frac{1}{1+\sqrt{x_0{}^2+1}} \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1+\sqrt{x_0{}^2+1} = 1 \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / \sqrt{x_0{}^2+1} = 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / x_0{}^2 = -1$ Absurde donc : $H \neq G$

Exercice9 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble non vide E

1)Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$

2)Montrer que : $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$

3)Monter que : $\begin{cases} \left(\overline{B-C}\right) \cup A = E \\ \left(\overline{C-D}\right) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$

Solution :1)$\Rightarrow)$ Montrons que : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \cup B = E$

On suppose que : $A \subset B$

a) On a : $\overline{A} \cup B \subset E$ évident

b) Montrons que : $E \subset \overline{A} \cup B$??

Soit $x \in E$: si $x \in A$ alors $x \in B$ car $A \subset B$

Donc : $x \in \overline{A} \cup B$

si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A}$ Donc : $x \in \overline{A} \cup B$

Donc : $E \subset \overline{A} \cup B$

Par suite : $\overline{A} \cup B = E$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $\overline{A} \cup B = E$; Montrons que : $A \subset B$??

Soit $x \in A$ Donc : $x \notin \overline{A}$

Supposons que : $x \notin B$

Alors : $x \notin \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

Alors : $x \in A \cap B$ donc : $x \in B$ contradiction

Donc : $x \in B$

Donc : $A \subset B$

Conclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$

2)$\Rightarrow)$ Montrons que : $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset \overline{B}$

On suppose que : $A \cap B = \varnothing$

Montrons que : $A \subset \overline{B}$?

Soit $x \in A$ alors $x \notin B$ car $A \cap B = \varnothing$

Par suite : $x \in \overline{B}$

$\Leftarrow)$ Montrons que : $A \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

On suppose que : $A \subset \overline{B}$ et montrons que : $A \cap B = \varnothing$?

Supposons que : $A \cap B \neq \varnothing$

Donc : $\exists x \in A \cap B$

Donc : $x \in A$ et $x \in B$ Donc : $\boxed{x \notin \overline{B}}$

On a : $x \in A$ et puisque $A \subset \overline{B}$

Alors : $\boxed{x \in \overline{B}}$ contradiction

Par suite : $A \cap B = \varnothing$

Donc : $A \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

Conclusion : $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$

3) On suppose que : $\left(\overline{B - C}\right) \cup A = E$ et $\left(\overline{C - D}\right) \cup A = E$

Remarquer que : $A \cup B = E \Rightarrow \overline{A} \subset B$

Donc : $B - C \subset A$ et $C - D \subset A$ cad

$B \cap \overline{C} \subset A$ et $C \cap \overline{D} \subset A$

Montrons que : $B - D \subset A$ cad $B \cap \overline{D} \subset A$?

Soit $x \in B \cap \overline{D}$

$x \in B \cap \overline{D} \Leftrightarrow x \in B$ et $x \in \overline{D}$

- Si $x \in C$ alors $x \in C \cap \overline{D}$ donc $x \in A$ car $C \cap \overline{D} \subset A$
- Si $x \notin C$ alors $x \in B \cap \overline{C}$ donc $x \in A$ car $B \cap \overline{C} \subset A$

Dans tous les cas : $(B - D) \subset A$

Exercice10 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$E = \{x \in \mathbb{Z} / |x+1| \le 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{Z} / |2x - a| \le 4\}$

1) Ecrire E en extension

2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E \cap F = \varnothing$

3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N} \cap F = \varnothing$

4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F \subset \mathbb{N}$

Solution : 1) il est aisé de voir que : $E = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

2) $F = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \le 2x - a \le 4\} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \le a \le 2x + 4\}$

Donc : $C_{\mathbb{Z}}^{F} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4\}$

$E \cap F = \varnothing \Leftrightarrow E \subset C_{\mathbb{Z}}^{F} \Leftrightarrow \forall x \in E; x \in C_{\mathbb{Z}}^{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; 2x - 4 \succ a \quad ou \quad a \succ 2x + 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; a \in \left]-\infty; 2x - 4\right[\cup \left]2x + 4; +\infty\right[\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in E} \left(\left]-\infty; 2x - 4\right[\cup \left]2x + 4; +\infty\right[\right)$

Puisque : $E = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ on obtient : $E \cap F = \varnothing \Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty; 2(-4) - 4\right[\cup \left]2 \times 2 + 4; +\infty\right[\right)$

$\Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty; -12\right[\cup \left]8; +\infty\right[\right)$

3)on a : $\overline{F} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4\}$

Donc nous pouvons écrire : $\mathbb{N} \cap F = \varnothing \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset \overline{F} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; x \in \overline{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; a \in \left]-\infty; 2x - 4\right[\cup \left]2x + 4; +\infty\right[$

$\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in \mathbb{N}} \left(\left]-\infty; 2x - 4\right[\cup \left]2x + 4; +\infty\right[\right) \Leftrightarrow a \in \left]-\infty; -4\right[$

3)On a : $F = \left\{x \in \mathbb{Z} / -2 + \frac{a}{2} \le x \le 2 + \frac{a}{2}\right\}$

Donc : $F \subset \mathbb{N} \Leftrightarrow F = \left(\forall x \in \left\{x \in \mathbb{Z} / -2 + \frac{a}{2} \le x \le 2 + \frac{a}{2}\right\}\right); x \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow -1 \prec -2 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow -2 \prec -4 + a \Leftrightarrow 2 \prec a$

Exercice11 : L'ensemble A^2 contient 9 éléments dont deux éléments sont $(x;y)$ et $(x;z)$ quels sont les autres éléments de A^2 ?

2) Existe-t-il une ensemble A tel que $card(A^2)=7$?

Solution :1) on sait que : $card(A^2)=card(A\times A)=card(A)\times card(A)=(card(A))^2$

L'ensemble A^2 contient 9 éléments donc : $(card(A))^2=9$

Donc : $card(A)=\sqrt{9}=3$

$(x;y)\in A^2 \Leftrightarrow x\in A \ \ et \ \ y\in A$

$(y;z)\in A^2 \Leftrightarrow z\in A \ \ et \ \ y\in A$

Donc : $A=\{x;y;z\}$

Donc : $A^2=\{(x;y);(y;x);(x;z);(z;x);(y;z);(z;y);\ ;(x;x);(y;y);(z;z)\}$

2) $(card(A))^2=7 \ \Leftrightarrow \ card(A)=\sqrt{7}\notin\mathbb{N}$

Donc : il n'existe pas un ensemble A tel que $card(A^2)=7$

Exercice12 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+3x+\dfrac{9}{4}\end{array}$

1) a) Calculer : $f(0)$ et $f(-3)$ et $f^{-1}(\{-1\})$

b) f est-elle injective ? justifier

c) f est-elle surjective ? justifier

d) f est-elle bijective ? justifier

2) Déterminer les intervalles I et J pour que : l'application f : $\begin{array}{l} :I\to J \\ x\mapsto f(x)\end{array}$ soit bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Solution : $f(x)=x^2+3x+\dfrac{9}{4}$

1) a) $f(0)=0^2+3\times 0+\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$; $f(-3)=(-3)^2+3\times(-3)+\dfrac{9}{4}=9-9+\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$

$f^{-1}(\{-1\})=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\{-1\}\}=\{x\in\mathbb{R}/f(x)=-1\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+\dfrac{9}{4}=-1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+\dfrac{13}{4}=0\right\}$

$x^2+3x+\dfrac{13}{4}=0 \qquad \Delta=3^2-4\times 1\times\dfrac{13}{4}=9-13=-4\prec 0$

Donc : pas de solutions

Donc : $f^{-1}(\{-1\})=\varnothing$

b) Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f(0)=f(-3)=\dfrac{9}{4}$ mais $0\neq -3$

Donc : f n'est pas injective

c) Par exemple : -1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=-1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Donc : f n'est pas surjective

2) f $\begin{array}{l} :I\to J \\ x\mapsto f(x)\end{array}$ a) Soient $x_1\in I$ et $x_2\in I$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2+3x_1+\frac{9}{4}=x_2^2+3x_2+\frac{9}{4}$

$\Rightarrow x_1^2-x_2^2+3x_1-3x_2=0\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)+3(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2+3)=0\Rightarrow x_1-x_2=0\ \ ou\ \ x_1+x_2+3=0$

Si je prends : $x_1+x_2+3\neq 0$ alors f est injective.

Par exemple : $x_1\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ et $x_2\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Alors : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

En effet : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1-x_2=0\ \ ou\ \ x_1+x_2+3=0$

$\Rightarrow x_1=x_2\ \ ou\ \ x_1+x_2+3=0$

On a : $x_1\geq\frac{-3}{2}$ et $x_2\geq\frac{-3}{2}\Rightarrow x_1+x_2+3\geq 0$

Si $x_1=\frac{-3}{2}$ et $x_2=\frac{-3}{2}$ alors : $x_1=x_2$

Si $x_1\succ\frac{-3}{2}$ ou $x_2\succ\frac{-3}{2}\Rightarrow x_1+x_2+3\succ 0\Rightarrow x_1=x_2$

Dans tous les cas f est injective. Si f $:\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\to J$

$x\mapsto f(x)$

b) Etudions la subjectivité de f :

$f(x)=x^2+3x+\frac{9}{4}=x^2+2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

Soient $y\in J$: Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$$\begin{cases}f(x)=y\\ x\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=y\\ x\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{3}{2}=\sqrt{y}\\ y\in[0;+\infty[\end{cases}\begin{cases}f(x)=y\\ x\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{y}-\frac{3}{2}\\ y\in[0;+\infty[\end{cases}$$

$(\forall y\in[0;+\infty[)\ (\exists!\ \boldsymbol{x}\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[)\ (\boldsymbol{f(x)=y})$

Donc : f est une bijection de $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ vers $[0;+\infty[$

Donc : $f^{-1}:\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\to[0;+\infty[$

$x\mapsto\sqrt{x}-\frac{3}{2}$

Exercice13 : Soit l'ensemble : $D=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y-x+1\geq 0\right\}$

Et soit l'application f : $]1;+\infty[\times\mathbb{R}\to D$

$(x;y)\mapsto(2x+y\ ;x^2+y)$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est Surjective
3) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f.

Solution : 1) Soit : $(x;y)\,;(x';y')\in]1;+\infty[\times\mathbb{R}$ tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y') \Leftrightarrow (2x+y\ ;x^2+y)=(2x'+y'\ ;\ x'^2+y')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2x'+y' \\ x^2+y=x'^2+y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-x')=y'-y & (1) \\ x^2-x'^2=y'-y & (2) \end{cases}$ $\quad (1)et(2) \Rightarrow x^2-x'^2 = 2(x-x')$

$\Rightarrow (x-x')(x+x')-2(x-x')=0 \Rightarrow (x-x')(x+x'-2)=0$

$\Rightarrow x-x'=0 \ \ ou\ \ x+x'-2=0 \Rightarrow x=x' \ \ ou\ \ x+x'=2$

On a : $(x;y)\ ;(x';y') \in]1;+\infty[\times\mathbb{R}$

Donc : $x\in]1;+\infty[$ et $x'\in]1;+\infty[$

Donc : $x\succ 1$ et $x'\succ 1$

Donc : $x+x'\succ 2$ par suite ; $x+x'\neq 2$

Et donc : $x=x'$

$2(x-x')=y'-y \ \ (1) \Rightarrow 0=y'-y \Rightarrow y=y'$

$\Rightarrow (x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soient $(a;b)\in D$: Résolvons l'équation : $f(x;y)=(a;b)$ dans : $]1;+\infty[\times\mathbb{R}$

$\begin{cases} f(x;y)=(a;b) \\ ]1;+\infty[\times\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (2x+y\ ;x^2+y)=(a\ ;\ b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=a \\ x^2+y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=b-a \\ y=b-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-b+a=0 \\ y=b-x^2 \end{cases}$

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-b+a)=4+4b-4a=4(1+b-a)\geq 0$ comme : $(a;b)\in D$ Donc : $1+b-a\geq 0$

Et donc : $\Delta=4(1+b-a)\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$x=\dfrac{2+\sqrt{4(1+b-a)}}{2}=1+\sqrt{1+b-a}\in]1;+\infty[$ ou $x=\dfrac{2-\sqrt{4(1+b-a)}}{2}=1-\sqrt{1+b-a}\notin]1;+\infty[$

Et il suffit de remplacer x dans : $y=b-x^2$ pour trouver y :

Donc : $y=b-\left(1+\sqrt{1+b-a}\right)^2\in\mathbb{R}$

Donc : $\forall(a;b)\in D\ ;\ \exists(x;y)\in]1;+\infty[\times\mathbb{R}\ \ f(x;y)=(a;b)$

Alors f est Surjective

f est une bijection de $]1;+\infty[\times\mathbb{R}$ vers D

$\begin{cases} f(x;y)=(a;b) \\ ]1;+\infty[\times\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(a;b)=(x;y) \\ y\in D \end{cases}$

$f^{-1}(a;b)=\left(1+\sqrt{1+b-a};b-\left(1+\sqrt{1+b-a}\right)^2\right)$ Donc : $\begin{aligned} f^{-1}:]1;+\infty[\times\mathbb{R} &\to D \\ (x;y) &\mapsto \left(1+\sqrt{1+y-x};y-\left(1+\sqrt{1+y-x}\right)^2\right) \end{aligned}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien