http://www.xriadiat.com **DL1: E** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère les propositions suivantes $P:"\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):x^2\geq x"$

$Q:"\left(\forall a\in\left[0;+\infty\right[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\prec 1"$ et $R:"P\Rightarrow Q"$

1) Donner : $\overline{P}$; $\overline{Q}$ et $\overline{R}$

2) Montrer que P est fausse

3) Déterminer la valeur de vérité de : Q

4) Déterminer la valeur de vérité de : R

Exercice2 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|\leq\dfrac{1}{2}x^2$.

Exercice3 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

2) Déduire que : $\forall(a;b;c;d)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\geq 6$

3) Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$

4) Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: on pose : $x=a+\dfrac{1}{b}$; $y=b+\dfrac{1}{c}$ et $z=c+\dfrac{1}{a}$

Montrer que : $x\geq 2$ ou $y\geq 2$ ou $z\geq 2$

Exercice4 : 1) Montrer que : $|x-1|\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\leq\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x\neq\sqrt{5}$ et $x\neq-\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{4+x^2}}\neq 1$

3) Montrer que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left|2x^2+5xy+3y^2\right|\leq 3\Rightarrow|x+y|\leq\sqrt{3}$ ou $|2x+3y|\leq\sqrt{3}$

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}\notin\mathbb{N}$

Exercice6 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$.

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_3): $\sqrt{x-1}\geq x-7$

Exercice8 : Monter que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C=B-C\end{cases}\Rightarrow A\subset B$

Exercice9 : On rappelle que l'on note : $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1) Montrer que :

a) $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=A\cap B\cap\overline{C}$

b) $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

2) En déduire que $(A \cap B)\ \Delta\ (A \cap C) = A \cap (B\Delta C)$

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}1 & si:\ x\prec 0\\ 1+x & si:\ x\geq 0\end{cases}\end{array}$

1) Déterminer les ensembles suivants : $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{1\})$; $f^{-1}(\{-1\})$; $f^{-1}(]1;2])$

2) a) f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Exercice11 : Soit L'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2x+2\end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

Exercice12 : Soit l'application g : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}^* \\ x\mapsto g(x)=\dfrac{9}{2x-1}\end{array}$

1)Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque

2) Déterminer $g^{-1}([-5;2])$

Exercice13 : Soit E un ensemble et $P(E)$ L'ensemble de ses parties, et soient A ; B des parties de E. Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E)\to P(E)\times P(E) \\ X\mapsto(X\cup A;X\cup B)\end{array}$

1)Montrer que f n'est pas surjective

2)Montrer que f est injective si et seulement si $A\cap B=\varnothing$

Exercice14 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1)$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

2) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien